

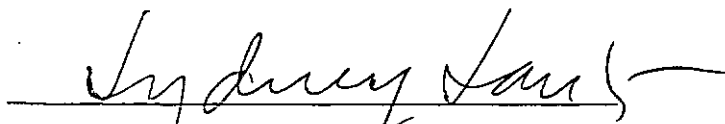
CHAPAS MULTIPLAMENTE CONEXAS

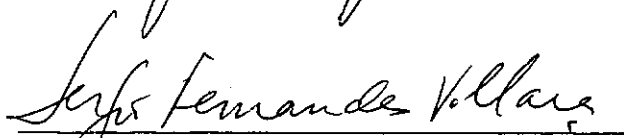
(USO DE MALHAS ARBITRÁRIAS)

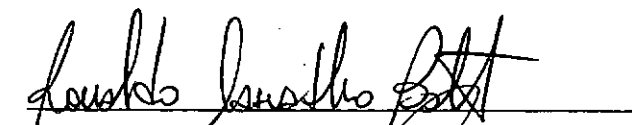
Jorge Luis Milek

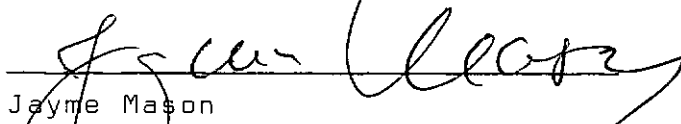
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Sydney Martins Gomes dos Santos
(Presidente)


Sergio Fernandes Villaça


Ronaldo Carvalho Batista


Jayme Mason

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1981

MILEK, JORGE LUIS

Chapas Multiplamente Conexas (Uso de Malhas Arbitrárias)
|Rio de Janeiro| 1981.

X, 83 p. 29,7 cm, (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil-1981)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - Faculdade
de Engenharia.

1. Estruturas

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

Dedico este trabalho à Elizabeth, minha esposa,

A Floriano e Maria de Lourdes, meus pais,

E à meu filho que está para chegar.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sydney Martins Gomes dos Santos, pela sugestão do tema e inestimável orientação durante o desenvolvimento do mesmo.

A todos os professores da COPPE pelos ensinamentos transmitidos, em especial ao Professor Sergio F. Villaça.

A CNEN - Comissão Nacional de Engenharia Nuclear, pelo apoio financeiro.

A todos os colegas, que direta ou indiretamente colaboraram na elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

2

Estuda-se neste trabalho, o estado plano de tensões, em domínios multiplamente conexos, pelo método das diferenças finitas.

Inicialmente, apresentamos uma revisão das fórmulas e métodos da Teoria da Elasticidade, para o estado plano de tensões.

No Capítulo III, são mostrados os aspectos peculiares a domínios multiplamente conexos, bem como, estabelecidas as equações para a determinação das constantes dos vários contornos internos.

No Capítulo IV, estuda-se um procedimento que torne simples a solução da equação de Laplace em diferenças finitas para malhas construídas de maneira irregular.

Finalmente, no Capítulo V, apresentamos dois exemplos, para simples verificação da eficiência do método.

ABSTRACT

The plane state of stresses in a multiply connected domain is studied by the Finite Difference method.

At first, the formula from the theory of Elasticity are reviewed for this plane stress state problem and methods of solution are presented in Chapter II.

In the Chapter III it is shown the peculiar of a multiple connected domain and associated boundary equations are established.

In the Chapter IV it is presented a simple procedure to write the Laplace's equations in forms of finite differences for irregular meshes.

Finally, two examples for assessing the method efficiency as compared to the finite element method and one analytical solution, are briefly discussed in Chapter V. Furthermore, some conclusions are drawn from these results and suggestions to expand the applicability of the present approach are given at the end of this last Chapter.

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C	-	constantes dos contornos internos
U, V	-	deslocamentos
e	-	deformações lineares e angulares
ν	-	coeficiente de Poisson
u, v	-	coordenadas oblíquas
ξ, η, ζ	-	coordenadas triangulares
r, θ	-	coordenadas polares
x, y	-	coordenadas cartesianas
∇	-	operador de Laplace
σ_i	-	tensão normal na direção i
τ_{ij}	-	tensões tangenciais
ρ_i	-	força de massa na direção i
\bar{x}	-	forças de superfície na direção x
\bar{y}	-	forças de superfície na direção y
ϕ	-	função de Airy
S	-	invariante de tensões
Q	-	resultante das forças em uma superfície

N	-	normal ao contorno
E	-	módulo de Young
U^*	-	energia potencial elástica
θ, α, β	-	ângulos
λ	-	abertura da malha
w	-	deslocamento de um ponto de uma placa na direção perpendicular à superfície média

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - FÓRMULAS E MÉTODOS	3
II.1 - Considerações Gerais	3
II.2 - Expressões Fundamentais	3
II.3 - A Função de Tensões	9
II.4 - Condições de Contorno em Termos da Função de Tensões	11
CAPÍTULO III - ASPECTOS PARTICULARES DO CÁLCULO DE PEÇAS MULTIPLAMENTE CONEXAS	17
CAPÍTULO IV - PARTICULARIDADES DAS MALHAS ARBITRÁ- RIAS	31
CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	47
V.1 - Considerações Gerais	47
V.2 - Exemplo 1	47
V.2-1 - Condições de Contorno	50

V.2-1.1	-	Valores de ϕ e suas Derivadas no Contorno	50
V.2-1.2	-	Valores de S nos Contornos	51
V.2-2	-	Montagem do Sistema de Equações	54
V.3	-	Exemplo 2	64
V.3-1	-	Condições de Contorno	64
V.3-1.1	-	Valores de ϕ e suas Derivadas no Contorno	64
V.3-1.2	-	Valores de S. nos Contornos	66
APÊNDICE A	-	75
A.1	-	Transformações para Coordenadas Triangulares . .	75
A.2	-	Transformações para Coordenadas Polares	79
BIBLIOGRAFIA		82

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A moderna engenharia civil tem exigido a utilização de elementos estruturais, sobre os quais pouco se conhece.

Dentre esses, citam-se as chapas multiplamente conexas, ou vigas-paredes com orifícios, de que, somente nos casos mais simples, a teoria matemática da Elasticidade, fornece a solução analítica. Tendo em vista esse fato, urge o desenvolvimento de técnicas numéricas aproximadas,

Em 1959, Santos [¹], apresentou nas Jornadas Sul-Americanas, realizadas em Santiago do Chile, a solução de placas e chapas de contorno poligonal qualquer, em diferenças finitas, utilizando malhas arbitrárias.

Em 1961, Mason [²], sugeriu um modelo para o cálculo de vigas-paredes com orifícios, também em diferenças finitas, para malhas quadradas.

Nosso trabalho é uma tentativa de fundir os dois textos acima citados, no intuito de sugerir um encaminhamento para a solução de chapas multiplamente conexas, com ori

fícios de forma qualquer.

A seguir, citamos alguns exemplos de utilização desses elementos estruturais:

- Reservatórios suspensos
- Vigas de fundações
- Paredes de centrais nucleares
- Vigas vazadas em edifícios, que sustentam vários pilares dos andares superiores.

CAPÍTULO II

FÓRMULAS E MÉTODOS

II.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O cálculo das chapas simples ou multiplamente co
nexas pode ser tratado como um problema do estado plano de ten
sões.

O estado plano de tensões tem as seguintes par
ticularidades:

- como o próprio nome diz, o problema se define em um plano, por exemplo Oxy , identificado com o da chapa;
- os deslocamentos segundo Oz , são desprezíveis; os outros dois, segundo Ox e Oy , con
sidera-se independentes da ordenada z .
- as tensões segundo a direção z , são nulas:

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

II.2 EXPRESSÕES FUNDAMENTAIS

Por ser esse um assunto bastante conhecido, as

equações diferenciais do equilíbrio elástico e as equações de compatibilidade serão apenas transcritas:

Equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0$$

II.1

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho_y = 0$$

onde ρ_x e ρ_y são as forças de massa nas direções x e y respectivamente.

Expressões das deformações:

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} ; \quad e_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{II.2}$$

sendo:

e_{xx} e e_{yy} - deformações lineares

e_{xy} - distorção angular

U - deslocamento na direção x

V - deslocamento na direção y

Condições de contorno:

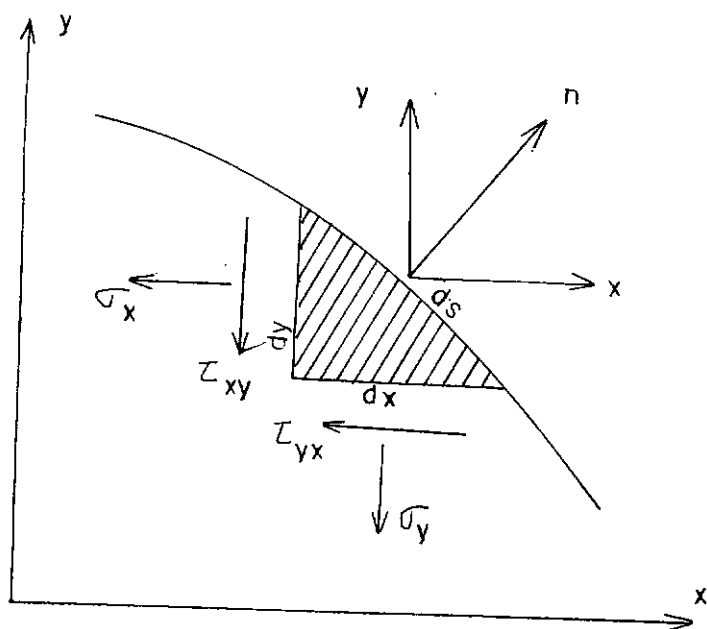


Figura 1

Estudando o equilíbrio do elemento tracejado da Figura 1, obtemos:

$$\bar{x} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny)$$

II.3

$$\bar{y} = \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yx} \cos(nx)$$

O problema do estado plano de tensões pode ser resolvido pela aplicação das equações II.1 e II.2, juntamen

te com as condições de contorno II.3.

Da equação II.2 tiramos:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{II.4}$$

A lei de Hooke nos fornece as seguintes expres
sões:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \text{II.5}$$

$$e_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

Derivando a equação II.5 teremos:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) \quad \text{II.6}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Derivando as expressões II.1:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \rho_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \rho_y}{\partial x} = 0$$

Somando estas equações membro a membro, e considerando-se as forças de massa constantes:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

donde:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.7}$$

Substituindo a equação II.7 na equação II.6:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1 + \nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

II.8

Substituindo II.8 em II.4, teremos:

$$\nabla^2 [\sigma_x + \sigma_y] = 0$$

Chamando $\sigma_x + \sigma_y = S$, vira, finalmente:

$$\nabla^2 S = 0$$

II.9

Esta equação é chamada de condição de Maurice -
- Levy.

A solução do problema plano de tensões envolve,
pois, o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

II.10

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + P = 0$$

onde $p_x = 0$ e $p_y = P$

$$\bar{x} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) \quad (II.3)$$

$$\bar{y} = \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny)$$

e

$$\nabla^2 S = 0 \quad (II.9)$$

II.3 A FUNÇÃO DE TENSÕES

Com o intuito de simplificar a solução, G.B. Airy introduziu o que se chamou de Função de Airy ou Função de tensões.

A simplificação baseia-se no fato de que é relativamente simples encontrar a solução geral do sistema II.10. Ele é não-homogêneo, portanto, sua solução geral se escreverá como a soma da solução geral do sistema homogêneo e a solução particular do sistema não-homogêneo.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

II.11

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

Uma solução particular do sistema não - homogêneo é:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = -Px$$

outra pode escrever-se:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_y = -Py$$

A obtenção da solução geral, será feita através da introdução de uma função $\phi(x, y)$, que satisfaça às seguintes condições:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} . \quad \text{II.12}$$

ϕ - função de Airy ou função de tensões

se substituirmos II.12 em II.11, facilmente se verifica que $\phi(x, y)$ satisfaz as equações II.11, e é, portanto, solução geral do sistema homogêneo.

Da equação II.12 obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sigma_x + \sigma_y$$

Lembrando que $\sigma_x + \sigma_y = S$, teremos

$$\nabla^2 \phi = S \quad \text{II.13}$$

II.4 CONDIÇÕES DE CONTOURNO EM TERMOS DA FUNÇÃO DE TENSÕES

No parágrafo anterior, vimos que as condições de bordo prescritas para as tensões, em função das forças externas são:

$$\bar{x} = \sigma_x \cos (nx) + \tau_{xy} \cos (ny)$$

$$\bar{y} = \tau_{xy} \cos (nx) + \sigma_y \cos (ny)$$

Da Figura 1, tiramos:

$$\cos (nx) = \frac{dy}{ds} \quad \text{e} \quad \cos (ny) = - \frac{dx}{ds} \quad \text{II.14}$$

substituindo II.12 e II.14 em II.3, teremos:

$$\bar{x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds}$$

$$\bar{y} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}$$

Estas relações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]$$

$$\bar{y} = - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]$$

Expressões que se integram entre dois pontos quaisquer de contorno, por exemplo (x_o, y_o) e (x_s, y_s) Figura 2. Efetuando-se estas integrações, virá:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - Q_y + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_o$$

II.15

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q_x + \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_o$$

onde

$$Q_y = \int_0^s \bar{y} ds \quad \text{e} \quad Q_x = \int_0^s \bar{x} ds \quad \text{II.16}$$

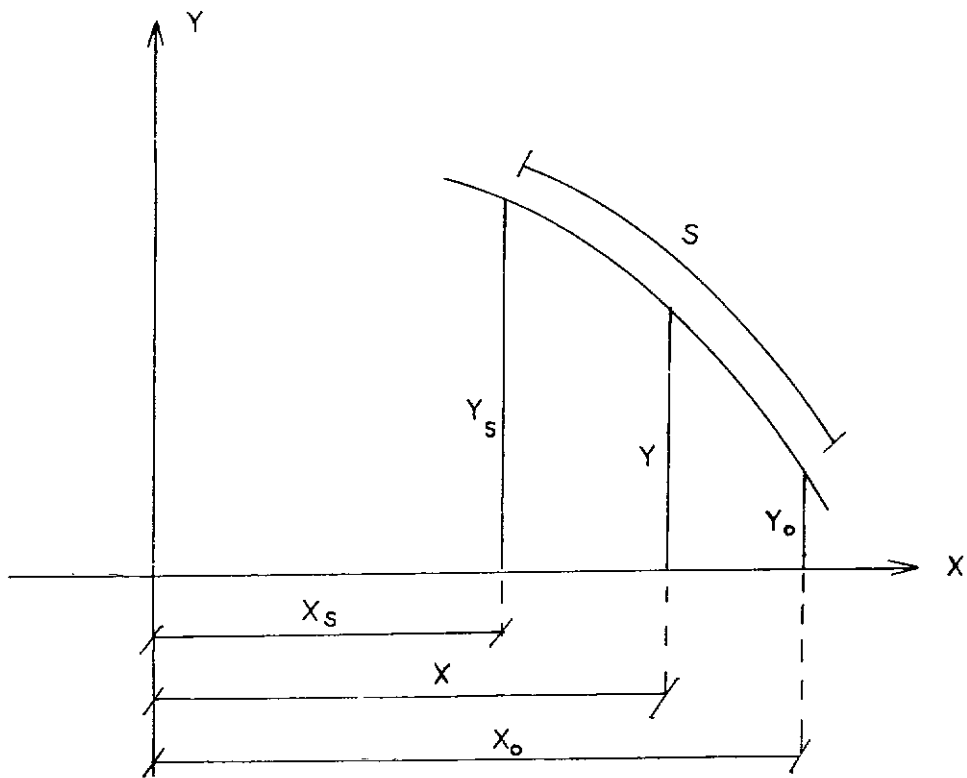


Figura 2

Por terem sido os limites de integração escolhidos arbitrariamente, os termos $\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_0$ e $\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_0$ serão tamẽm arbitrários: representá-lo-emos pelos constantes A e B respectivamente.

A equação II.15 ficará então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - Q_y + A$$

II.17

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q_x + B$$

As expressões II.16, fornecem a resultante das forças externas, segundo as direções y e x respectivamente, desde uma origem (x_0, y_0) até o ponto considerado (x_s, y_s) .

Para obtermos a função $\phi(x, y)$, devemos efetuar nova integração de contorno. Faz-se isto, substituindo as expressões II.16, na seguinte expressão diferencial.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

Procedendo à substituição e efetuando uma integração por partes ao longo do contorno, chegamos à seguinte ex-pressão para $\phi(x, y)$ válida no bordo.

$$\phi(x, y) = \left[\int_0^s \bar{x} (y_s - y) ds + \int_0^s \bar{y} (x - x_s) ds \right] + Ax + By + C \quad \text{II.18}$$

Na expressão acima, o termo entre colchetes, representa o momento das forças externas, compreendidas entre (x_0, y_0) e (x_s, y_s) em relação a (x_s, y_s) , positivo no sentido anti-horário, logo:

$$\phi(x, y) = m + Ax + By + C \quad \text{II.19}$$

ou, se o contorno for descarregado:

$$\phi(x, y) = Ax + By + C$$

As constantes A, B e C, surgiram em consequência das integrações efetuadas, e representam fatores lineares de contorno. No próximo capítulo, nos deteremos com mais atenção na análise destas constantes.

A solução do problema plano de tensões consiste, então, em resolver o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\nabla^2 S = 0 \quad (\text{II. 9})$$

II.20

$$\nabla^2 \phi = S \quad (\text{II.13})$$

juntamente com as condições de contorno especificadas para a função $\phi(x, y)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -Q_y + A$$

(II.17)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q_x + B$$

e

$$\phi(x, y) = m + Ax + By + C \quad (\text{II.19})$$

Devemos observar que precisamos primeiro encontrar a solução de II.9, pois ela fornecerá dados para a solução de II.13.

Alternativamente, podemos operar com II.13, da seguinte maneira:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \nabla^2 S$$

usando II.9, teremos:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad \text{II.21}$$

Nesta forma, a solução do problema plano de tensões será dada por uma função $\phi(x, y)$ que satisfaça II.21 e as condições de bordo II.17 e II.19.

Na prática, verifica-se, que a função de tensões $\phi(x, y)$ pode ser encontrada analiticamente para casos de relativa simplicidade. Na grande maioria deles, temos que optar por algum processo numérico. No presente trabalho optamos pelo método das diferenças finitas.

CAPÍTULO III

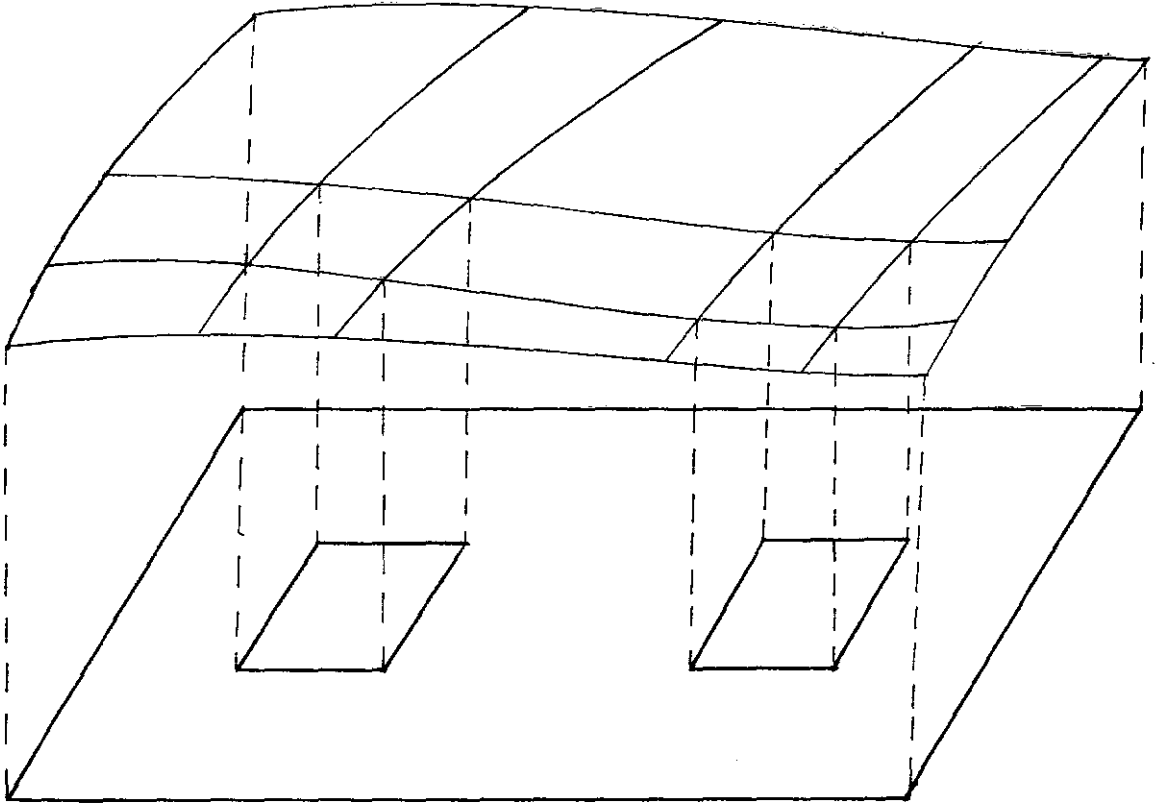
ASPECTOS PARTICULARES DO CÁLCULO
DE PEÇAS MULTIPLAMENTE CONEXAS

Estudaremos neste capítulo, como tratar constan
tes A_i , B_i e C_i dos diversos contornos.

A primeira vista, pode parecer que estas constan
tes, por serem fatores lineares de contorno, não influem no es
tado de tensões, pois desapareceriam com a derivação segunda:
veremos, no entanto, que este fato não ocorre.

Cremos que a maneira mais simples de verificar
a veracidade deste particular, é encará-lo pelo ponto de vista
geométrico.

Imaginaremos uma região α , β , γ , δ , de con
torno C_1 , no plano xy , provido de orifícios C_2 e C_3 .



Em cada ponto do domínio e dos contornos, levantamos uma perpendicular, representando o valor da função ϕ . Obteremos assim a superfície $\phi(x, y)$.

Suponhamos o contorno externo carregado, e os demais, descarregados. Assim procedendo, teremos

$$\phi = m + A_1 x + B_1 y + C_1 \quad \text{em } C_1$$

$$\phi = A_2 x + B_2 y + C_2 \quad \text{em } C_2$$

$$\phi = A_3 x + B_3 y + C_3 \quad \text{em } C_3$$

Imaginemos a forma da função ϕ , perfeitamente de finida. Se alterarmos agora as constantes de um dos contornos, por exemplo o contorno externo, toda a superfície sofrerá um movimento de corpo rígido, mantendo assim, sua forma e consequentemente sua curvatura. Para que isto ocorra, é necessário que as constantes dos outros contornos também sejam alteradas. Concluimos assim, que as constantes de um dos contornos são arbitrárias, e que as constantes dos outros contornos dependerão destas. Imaginando que as constantes de cada contorno, formam um conjunto, teremos então, no presente exemplo tres conjuntos, e podemos afirmar que estes tres conjuntos serão dependentes entre si.

Para a determinação destas constantes, temos dois caminhos, a saber

- a) Escolher as constantes de maneira a tornar a energia elástica armazenada na chapa um mínimo, obedecendo um princípio energético da elasticidade;
- b) Obrigar os deslocamentos a serem funções unívocas de sua posição no domínio;

Em nosso trabalho, optamos pelo segundo. Antes, porém, de desenvolvê-lo, vamos tecer algumas considerações sobre o método energético.

A energia elástica armazenada em uma chapa sujeita a um dado estado de tensões, é expressa por \int^2 :

$$U^* = \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

III.1

Para que a função corresponda ao verdadeiro estado de tensões da chapa, é necessário que essa função torne a energia elástica armazenada na chapa um mínimo. Este princípio energético serve, então, de suporte teórico para a determinação das constantes A_i , B_i e C_i .

Operando numericamente, pode-se exprimir III.1, em função dos valores de ϕ no domínio e nos contornos, nos pontos escolhidos, resultando uma função quadrática deles. A expressão da energia elástica armazenada, terá então a seguinte forma:

$$U^* = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \dots, A_m, B_m, C_m)$$

onde:

$n \rightarrow$ número de pontos do domínio

$m \rightarrow$ número de contornos

Para que o funcional acima seja estacionário, te

remos que ter:

$$\frac{\partial U^*}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial B_1} = 0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial C_1} = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial B_2} = 0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial C_2} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial A_m} = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial B_m} = 0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial C_m} = 0$$

Obtemos assim, um sistema de $3m$ equações a $3m$ incógnitas em A_i , B_i e C_i , $i = 1, m$, que nos permite calculá-los, em função dos valores de ϕ nos pontos do domínio. O sistema acima, será dado em função dos quadrados dos ϕ_n , transformando o sistema linear de equações, resultante da aplicação das equações $\nabla^2 S = 0$ e $\nabla^2 \phi = S$, em um não-linear.

Este fato torna o processo praticamente inconveniente para a aplicação do método das diferenças finitas.

Ocupemo-nos então do segundo.

Com as expressões II.5, teremos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

Substituindo nas equações acima as expressões II.12, vem:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Segundo as expressões III.2, precisamos garantir a univocidade de U , V e $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$, pois as demais terão univocidade garantida.

Para que isto ocorra, devemos ter, em caminhos fechados

$$\oint dU = 0; \quad \oint dV = 0; \quad \oint d\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, \quad \oint d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{III.3}$$

Em qualquer curva completa, tal como PQP, situada no domínio, Fig. 3, as expressões III.3, têm de ser satisfeitas;

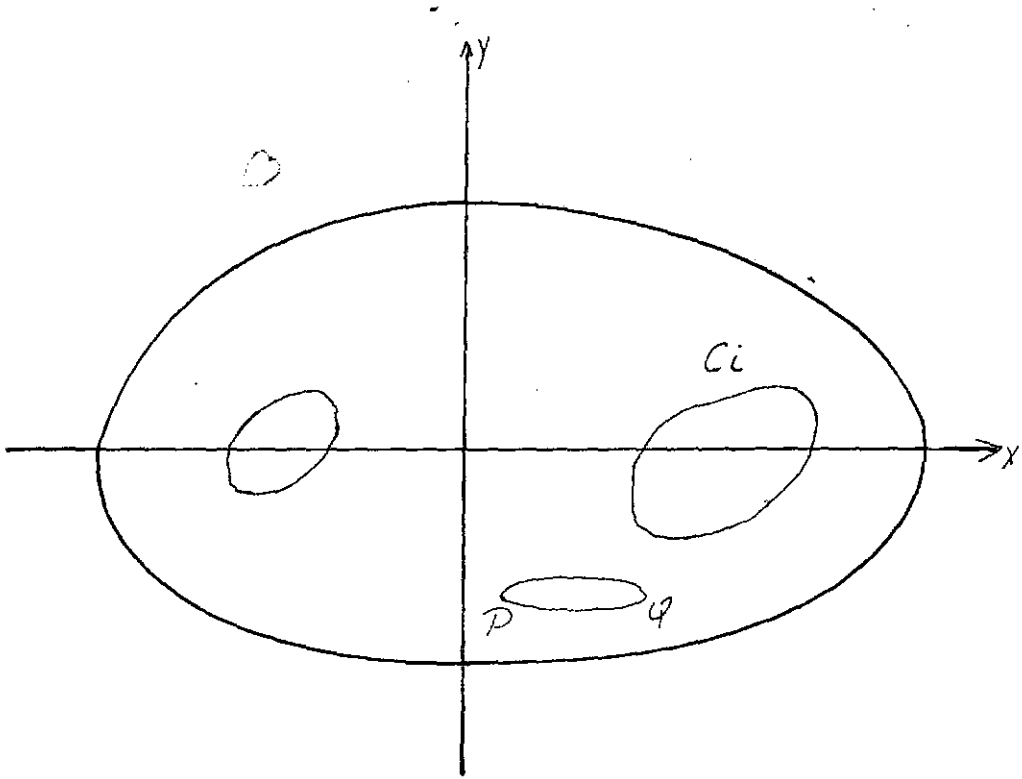


Figura 3

estas curvas poderão naturalmente circundar os orifícios internos.

Imporemos primeiro as condições de univocidade para U e V.

$$\oint dU = 0$$

usando a expressão diferencial:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad \text{III.4}$$

teremos:

$$\oint \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) = 0$$

Integremos, agora, a segunda parcela por partes:

$$\oint \frac{\partial U}{\partial y} dy = \left[y \frac{\partial V}{\partial y} \right]_P^Q - \oint y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy$$

Se fizermos $P \rightarrow Q$, teremos o fator constante nulo, devido a univocidade de y , resulta assim

$$\oint \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx - y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy \right) = 0 \quad \text{III.5}$$

Das relações III.2, tiramos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Substituindo III.2 e III.6 em III.5, teremos:

$$\oint \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) dx + y \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0 \quad \text{III.7}$$

Vejamos agora, a condição:

$$\oint dV = 0$$

escrevendo dV de forma analoga à III.4, teremos:

$$\oint \left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right] = 0$$

integrando o primeiro fator por partes:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = + \frac{\partial V}{\partial x} x \Bigg|_P^Q - \oint x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx$$

se $P \rightarrow Q$, o fator de contorno se anula, devido a univocidade de x , teremos, então:

$$\oint \left[-x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right] = 0 \quad \text{III.8}$$

usando III.2 e III.6 em III.8, teremos:

$$\oint \left[x \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dy \right] = 0 \quad \text{III.9}$$

Vejamos agora em que se transformam as condições de univocidade para $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$

$$d \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) dy$$

$$\oint d \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \oint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \right] = 0$$

usando as relações III.6, chegaremos a

$$\oint \left[\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0 \quad \text{III.10}$$

Para $\frac{\partial V}{\partial x}$:

$$d \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dy$$

$$\oint d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \oint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dy \right] = 0$$

usando as relações III.5, teremos:

$$\oint \left[- \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy \right] = 0 \quad \text{III.11}$$

Vemos que para a determinação das tres constantes de cada contorno, temos quatro equações. Porém, as equações III.10 e III.11, são idênticas. Isto pode ser demonstrado facilmente, transformando as integrais de contorno em integrais de domínio, através da aplicação do teorema de Green.

Sabemos, por esse teorema, que:

$$\oint (F dy - G dx) = \iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{III.12}$$

aplicado essa equação em III.10, teremos:

$$G = \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}, \quad F = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \nu \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + (2 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Substituindo em III.12, teremos:

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) dx dy = \iint \nabla^4 \phi dx dy = 0$$

Aplicando o teorema a III.11, teremos:

$$F = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}, \quad G = \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + (2 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Substituindo em III.12, teremos:

$$\iint \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) dx dy = \iint \nabla^4 \phi dx dy = 0$$

O que mostra que III.10 e III.11 são idênticas; podemos usar uma ou outra, indifêrentemente, no cálculo.

Temos então as equações III.7, III.9 e III.10 ou III.11, para a determinação das constantes A_i , B_i e C_i de cada contorno. Devemos notar que este grupo de equações deve ser aplicado tantas vezes quantas forem os grupos de constantes a determinar.

Alternativamente, podemos transformar as integrais de contorno III.7 e III.9 em integrais de domínio, pela aplicação do teorema de Green, o que resulta em:

$$\iint \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + y \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + (2 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] dx dy = 0$$

$$\iint \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + x \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + (2 + \nu) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] dx dy = 0$$

Achamos porém, que, para a aplicação do método das diferenças finitas, o trabalho resulta mais cômodo, apli

cando as integrais de contorno.

CAPÍTULO IV

PARTICULARIDADES DAS MALHAS ARBITRÁRIAS

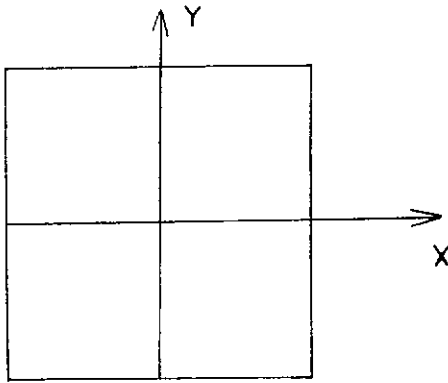
Dissemos no capítulo anterior, que somente casos simples dos problemas de elasticidade, podem ser resolvidos analiticamente. Na grande maioria dos casos, temos de lançar mão dos métodos aproximados.

Um desses métodos é o das diferenças finitas, que é um método de discretização do domínio.

O método das diferenças finitas, é de aplicação extremamente simples na resolução de problemas do estado plano de tensões.

Este fato, se dá sobretudo quando o domínio do problema, pode ser discretizado através de uma malha regular, não importando o sistema de coordenadas usado. Podemos citar como exemplo os seguintes sistemas:

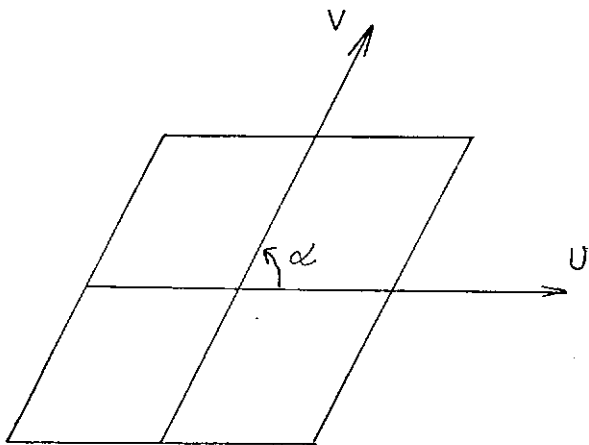
- Sistema de coordenadas cartesianas



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

IV.1

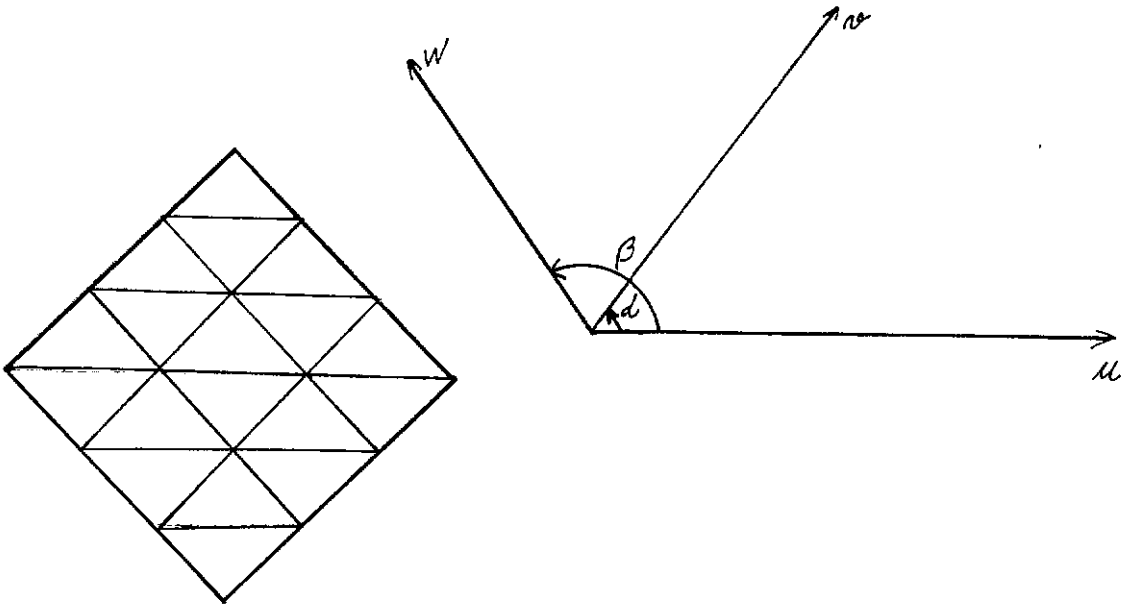
- Sistema de Coordenadas Oblíquas | 4 |



$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

IV.2

- Sistemas de Coordenadas Triangulares



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)} \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} \sin 2\alpha - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \sin 2\beta + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \cos \alpha \cos \beta \sin(\beta - \alpha) \right]$$

IV.3

Nos exemplos acima, vemos que o trabalho de se escrever as equações em diferenças finitas para todos os pontos do domínio, pode ser grande, mas será, sem dúvida, sempre muito simples quando o domínio pode ser discretizado através de uma mailha regular.

Porém, se quisermos escrever o operador de Laplace para a Figura 4, esbarramos na dificuldade de não conseguirmos substituir os valores infinitesimais, por valores finitos, pois

uma direção não é mantida por um mínimo de tres pontos.

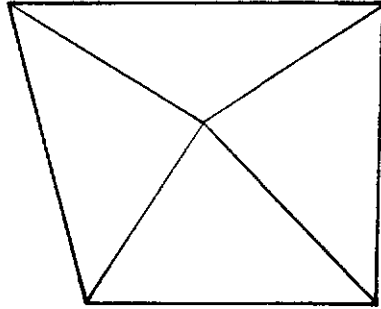
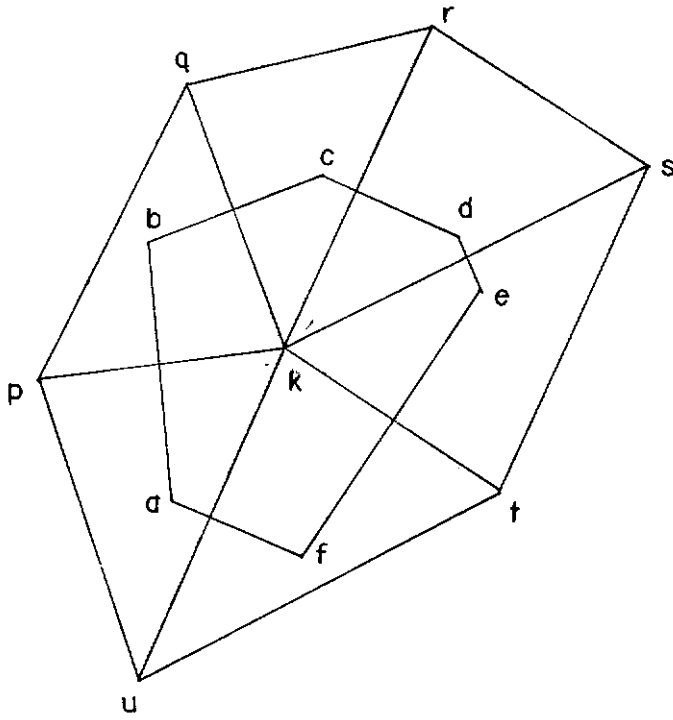


Figura 4

A fim de contornar essa dificuldade, exporemos agora, um método absolutamente geral, isto é, aplica-se para qualquer que seja a discretização.

O método a seguir foi desenvolvido para um problema de placas. No final do capítulo mostraremos a perfeita analogia entre esses problemas e os problemas de chapas.

Consideremos um setor interno de uma membrana de contorno qualquer, Figura 5, discretizada de maneira arbitrária.



$K \rightarrow$ nó para o qual se deseja escrever o operador de Laplace;

$p, q, \dots, n \rightarrow$ nós da malha vizinhos a K

$\overline{ab}, \overline{bc}, \dots, \overline{fa} \rightarrow$ mediatrizes aos raios $\overline{pk}, \overline{qk}, \dots, \overline{uk}$, respectivamente.

Figura 5

Façamos algumas considerações sobre o deslocamento do nó K .

Todo o carregamento que estiver contido no interior do polígono formado pelas meadiatrizes \overline{ab} , \overline{bc} ..., etc., será considerada agindo sobre o nó K.

O nó K, sob efeito desse carregamento, se deslocará de w_k , e os demais nós, de w_p , w_q , ..., w_u , respectivamente. A grandeza das reações R, dependerá da grandeza desses deslocamentos. [Figura 6]

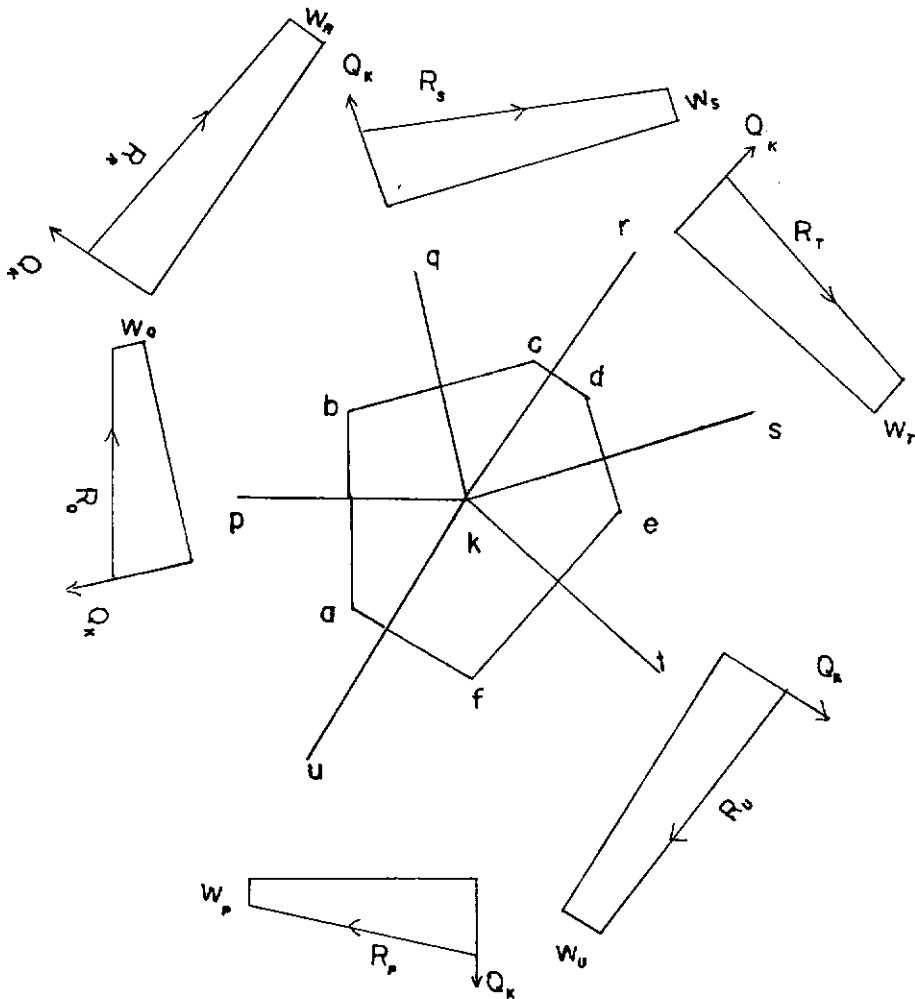


Figura 6

É evidente que o somatório dos componentes verticais dos R_i , deverá equilibrar Q_k .

Se S for a tração da membrana por unidade de comprimento, deveremos ter:

$$R_p = \overline{ab} \cdot S$$

$$R_q = \overline{bc} \cdot S$$

$$R_r = \overline{cd} \cdot S$$

IV.5

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{array}$$

$$R_u = \overline{fa} \cdot S$$

Façamos agora, o deslocamento w_k , do nó K , unitário e os deslocamentos dos demais nulos. Chamemos de δ_{kk} a força capaz de efetuar esse deslocamento e $-\delta_{kp}, -\delta_{kq}, \dots, -\delta_{ku}$, as forças que deveriam estar aplicadas em p, q, \dots, u , respectivamente, a fim de anular os deslocamentos desses mesmos nós.

Estudemos por exemplo, o nó s :

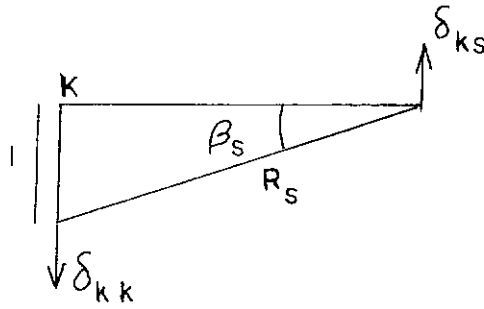
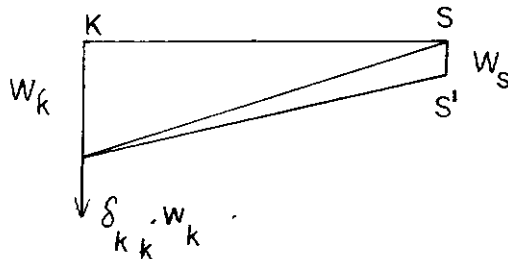


Figura 7

Se ω_k for diferente da unidade, a força aplicada no nó S, será:

$$\omega_k \cdot \delta_{ks}$$

Porém, o nó S, sofre um deslocamento ω_s



Para a posição S', isto é, o nós S sofrendo um deslocamento ω_s , a força vertical em S, será

$$(\omega_k - \omega_s) \delta_{ks},$$

pois ela foi reduzida de:

$$\omega_s \cdot \delta_{ks}$$

Todos os demais nós que circundam o nó K, terão expressões análogas para as forças verticais.

Se escrevermos a equação de equilíbrio em torno do nó, lembrando que Q_k é a força externa agindo em K, teremos:

$$\omega_k \delta_{kk} - (\delta_{kp} \omega_p + \delta_{kq} \omega_q + \delta_{kr} \omega_r + \delta_{ks} \omega_s + \delta_{kt} \omega_t + \delta_{ku} \omega_u) = Q_k$$

IV.5

Esta equação nada mais é, do que uma equação de coerência linear.

Cálculo dos $\delta\delta$

Se conseguirmos calcular, cada um dos $\delta\delta$ em função dos valores característicos da malha, teremos o problema resolvido.

Da Figura 7, tiramos as seguintes relações:

$$\delta_{ks} = R_s \text{ sen } \beta_s \quad e$$

$$\text{sen } \beta_s = \frac{1}{K_s}$$

das duas relações acima, temos:

$$\delta_{ks} = \frac{Rs}{\overline{Ks}} \quad \text{IV.6}$$

substituindo IV.4 em IV.6, decorre que:

$$\delta_{ks} = \frac{\overline{de}}{\overline{Ks}} s \quad \text{IV.7}$$

substituindo IV.7 em IV.5, teremos:

$$\omega_k \left(\frac{\overline{ab}}{\overline{kp}} + \frac{\overline{bc}}{\overline{kq}} + \dots \right) - \left(\omega_p \frac{\overline{ab}}{\overline{kp}} + \omega_q \frac{\overline{bc}}{\overline{kq}} + \dots \right) = \frac{Qk}{s} \quad \text{IV.8}$$

A equação IV.8, foi deduzida para seis pontos circundando o nó K; ela vale, no entanto para qualquer que seja o número desses pontos.

Vejamos, então, em que resulta a aplicação dessa equação no exemplo a seguir, Figura 8.

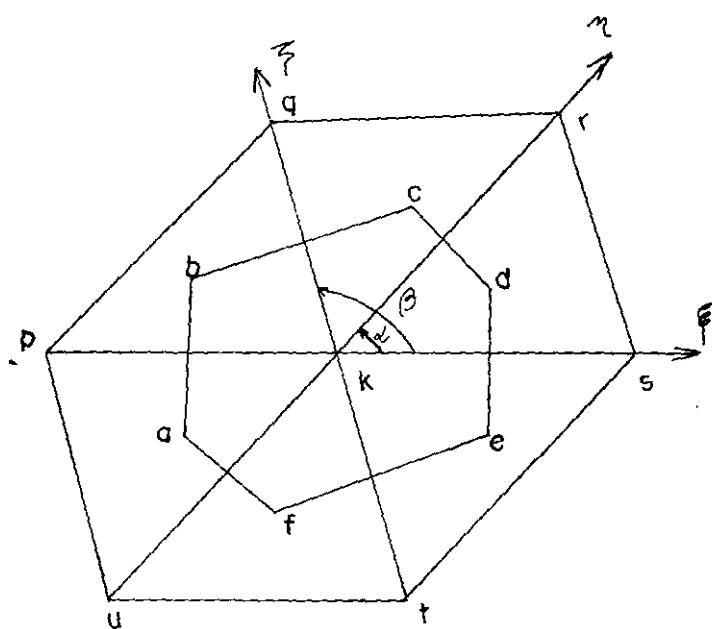


Figura 8

pando:

$$\overline{kp} = \lambda_p$$

$$\overline{kq} = \lambda_q$$

$$\overline{kr} = \lambda_r$$

$$\overline{ks} = \lambda_s$$

$$\overline{kt} = \lambda_t$$

$$\overline{ku} = \lambda_u$$

teremos:

$$\lambda_p = \lambda_s = \lambda_\xi$$

$$\lambda_r = \lambda_u = \lambda_\eta \quad \text{por construção}$$

$$\lambda_q = \lambda_t = \lambda_\zeta$$

$$\theta_1 = 90 - \beta + \alpha = \frac{a k b}{2} = \frac{d k b}{2}$$

$$\theta_2 = 90 - \beta = \frac{a k f}{2} = \frac{c k d}{2}$$

$$\theta_3 = 90 - \alpha = \frac{b k c}{2} = \frac{f k e}{2}$$

$$\overline{ab} = \overline{dc} = \lambda_\xi \operatorname{tg} \theta_1 = \lambda_\xi \cotg (\beta - \alpha)$$

$$\overline{bc} = \overline{ef} = \lambda_\zeta \operatorname{tg} \theta_3 = \lambda_\zeta \cotg \alpha$$

$$\overline{cd} = \overline{fa} = \lambda_\eta \operatorname{tg} \theta_2 = -\lambda_\eta \cotg \beta$$

$$\text{Area } (a b c d e f) = \frac{1}{3} \text{Area } (p q r s t u) = 2 T =$$

$$= \lambda^2 \xi \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} = \lambda^2 \eta \frac{\sin \alpha \sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta} = \lambda^2 \zeta \frac{\sin (\beta - \alpha) \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{IV.9}$$

substituindo os valores acima na equação IV.8, teremos:

$$-(\omega_r - 2\omega_k + \omega_u) \cotg \beta - (\omega_q - 2\omega_k + \omega_t) \cotg \alpha - (\omega_p - 2\omega_k + \omega_s) \cotg (\beta - \alpha) = \frac{Q_k}{s} \quad \text{IV.10}$$

Supondo-se um carregamento uniforme sobre a área formada pelas mediatrizes teremos:

$$Q_k = q_x \times \text{área (a b c d e f)} = 2 Q_k \cdot T$$

onde q_k é a taxa de carga;

dividindo IV.10 por $2T$, usando IV.9 e, lembrando que:

$$\frac{\omega_r - 2\omega_k + \omega_u}{\lambda \eta^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\omega_q - 2\omega_k + \omega_t}{\lambda \zeta^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\omega_p - 2\omega_k + \omega_s}{\lambda \xi^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$$

teremos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha - \beta)} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \sin 2 \alpha - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \sin 2 \beta + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \cos \alpha \cos \beta \sin (\beta - \alpha) \right] = \frac{q_k}{s}$$

O operador diferencial da expressão acima, é exatamente o operador Laplaciano em coordenadas triangulares, visto em IV.3.

Apliquemos agora, a expressão IV.8, no exemplo da Figura 9.

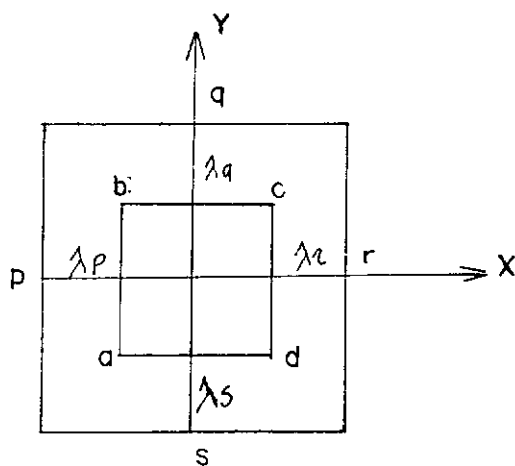


Figura 9

$$\lambda_p = \lambda_q = \lambda_r = \lambda_s = \lambda$$

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{de} = \lambda$$

Aplicando a equação IV.8, teremos:

$$\omega_k \left(\frac{\overline{ab}}{\lambda p} + \frac{\overline{bc}}{\lambda q} + \frac{\overline{cd}}{\lambda r} + \frac{\overline{dc}}{\lambda s} \right) - \left(\omega_p \cdot \frac{\overline{ab}}{\lambda p} + \omega_q \frac{\overline{bc}}{\lambda q} + \omega_r \frac{\overline{cd}}{\lambda r} + \omega_s \frac{\overline{de}}{\lambda s} \right) = \frac{Q_k}{S}$$

$$4 \omega_k - \omega_p - \omega_q - \omega_r - \omega_s = \frac{Q_k}{S}$$

Vemos que o primeiro membro da equação acima, é o operador de Laplace em coordenadas cartesianas escrito em diferenças finitas.

A equação IV. 8, representa, então, o operador de Laplace para qualquer que seja o tipo da discretização.

Como dissemos no início do presente capítulo, a equação IV. 8, foi deduzida para um problema de placa.

Vejamos, agora, a perfeita analogia existente entre os problemas de placas e chapas.

Temos para as placas:

$$\nabla^4 \omega = \frac{P}{N}$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{M}{N} \quad \text{onde} \quad M = -N \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = N \nabla^2 \omega = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}, \quad \nabla^2 M = -p$$

para as chapas:

$$\nabla^4 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = S$$

onde:

$$S = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\nabla^2 S = 0$$

Comparando os dois grupos de expressões, podemos afirmar que tudo quanto usamos para as placas, pode ser corretamente empregado para as chapas.

CAPÍTULO VAPLICAÇÕESV.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A título de verificação da eficiência do método, resolvemos uma chapa, submetida a dois tipos de carregamentos.

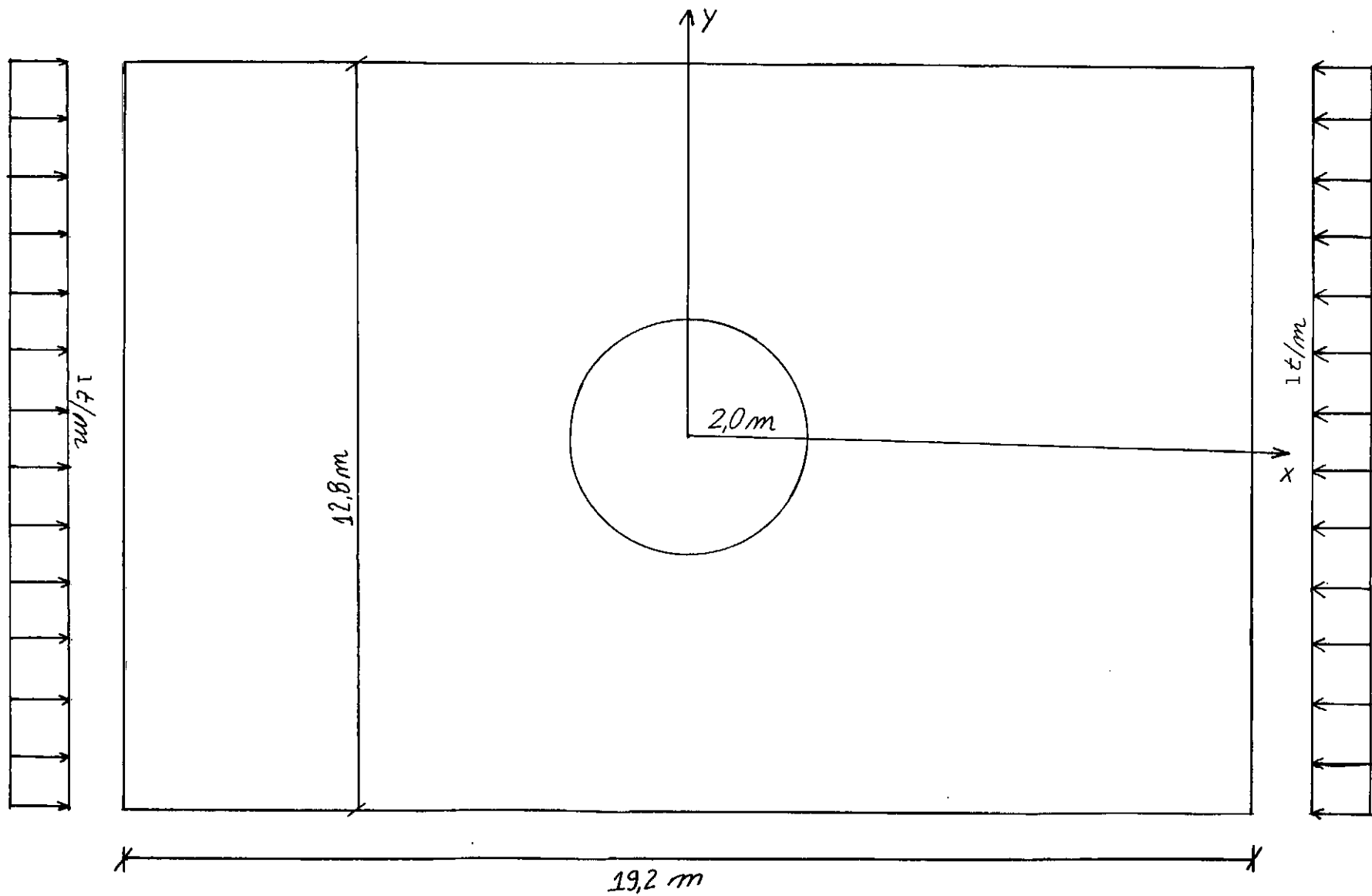
Como se trata de um problema demonstrativo, restringimo-nos a malhas pouco densas.

V.2 EXEMPLO 1

Trata-se de uma chapa retangular, comprimida em lados opostos por um carregamento de uma tonelada por metro - Figura 10.

Devido à dupla simetria do problema, discretizamos apenas um quarto do domínio.

A malha utilizada, encontra-se na Figura 11, onde se pode notar que o orifício circular foi aproximado para um octógono.



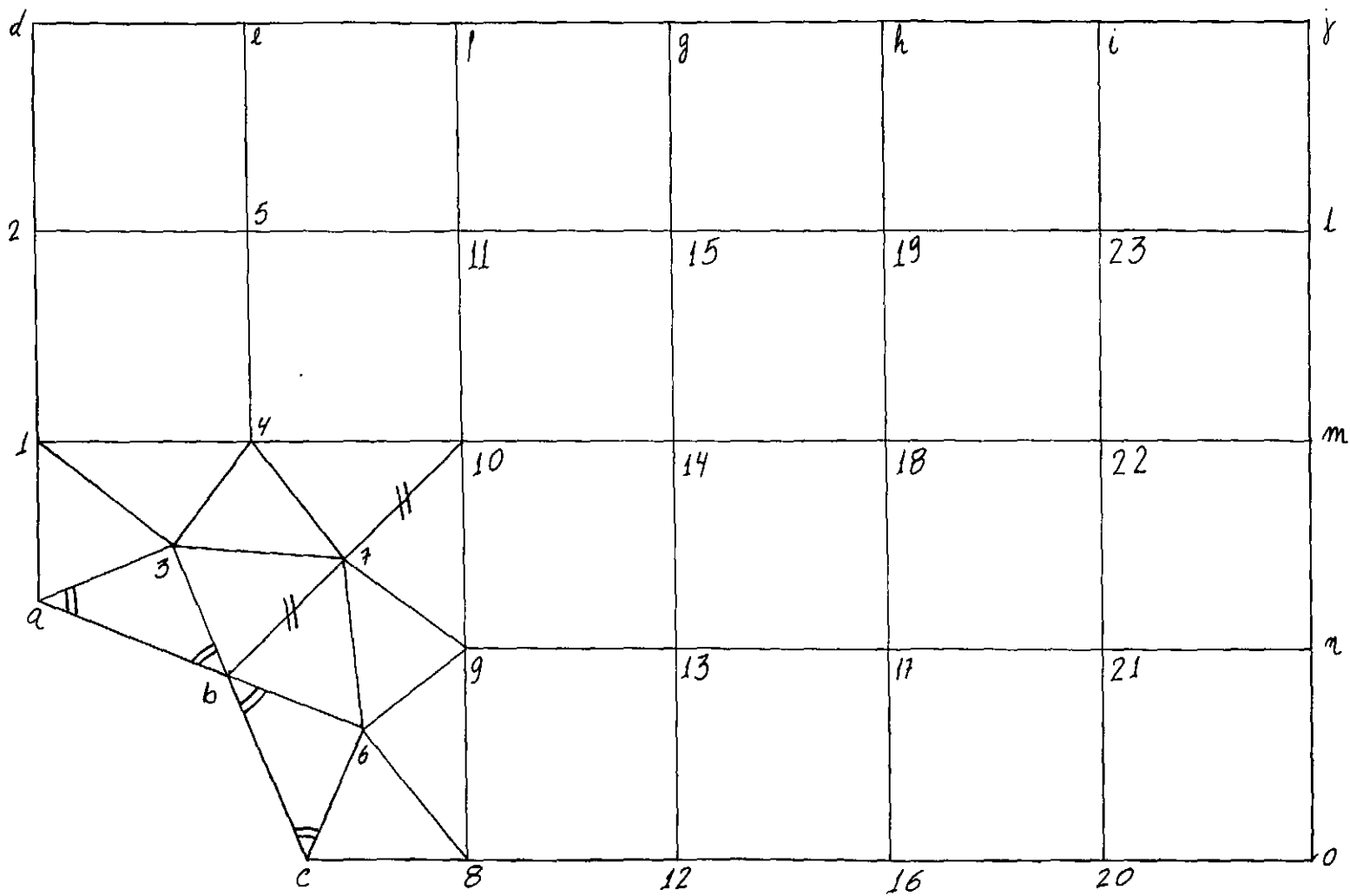


Figura 11

V.2-1 Condições de Contorno

V.2-1.1 Valores de ϕ e suas derivadas no contorno

a) Contorno Externo

$$\phi_o = 0 \quad , \quad \phi_n = -1,28 \quad , \quad \phi_m = -5,12$$

$$\phi_\ell = -11,52 \quad , \quad \phi_d = \dots = \phi_j = -20,48$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{em todos os pontos.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}^o = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}^n = -1,6 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}^m = -3,2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}^\ell = -4,8 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}^d = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial y}^j = -6,4$$

b) Contorno Interno

$$\phi = Ax + By + C$$

Em virtude da dupla simetria, em relação aos ei
xos x e y , deveremos ter:

$$A = B = 0 ,$$

pois representam termos anti-simétricos em relação a estes ei-
xos. Desse fato resulta:

$$\phi_a = \phi_b = \phi_c = C$$

V.2-1.2 Valores de S nos contornos

a). Contorno Externo

$$S = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Escrevendo-se a relação acima, em diferenças fi
nitas, para cada um dos pontos do contorno externo, resulta:

$$S_o = 0,781 \phi_{20} - 1$$

$$S_n = 0,781 \phi_{21}$$

$$S_m = 0,781 \phi_{22}$$

$$S_\ell = 0,781 \phi_{23} + 8$$

$$S_j = -1$$

$$S_i = 0,781 \phi_{23} + 8$$

$$S_h = 0,781 \phi_{19} + 8$$

$$S_g = 0,781 \phi_{15} + 8$$

$$S_f = 0,781 \phi_{11} + 8$$

$$S_e = 0,781 \phi_5 + 8$$

b) Contorno Interno

$$S = \sigma_x + \sigma_y ,$$

ou, lembrando-se que, a soma de duas tensões normais, segundo duas direções perpendiculares entre si, é invariante, teremos:

$$S = \sigma_t + \sigma_n ,$$

ou

$$S = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

como

$$\sigma_n = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

resulta:

$$S = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}$$

Escrevendo esta expressão em diferenças finitas, para cada um dos pontos do contorno interno, teremos:

$$S_a = 1,389 \phi_1 - 1,389C$$

$$S_b = 1,26 \phi_7 - 1,26C$$

$$S_c = 1,389 \phi_8 - 1,389C$$

V.2-2 Montagem do Sistema de Equações

O sistema de equações foi montado, escrevendo-se que:

$$\nabla^2 S = 0$$

e

$$\nabla^2 \phi = S$$

em diferenças finitas para os 23 pontos do interior do domínio.

Na região do domínio onde a malha é regular, escrevemos as equações aplicando o conhecido operador de Laplace em diferenças finitas. Na região onde temos malha irregular, aplicamos as equações estabelecidas por Santos^[1].

As equações do contorno interno, merecem algumas considerações.

No capítulo III, foram estabelecidas tres equações para a determinação das constantes do contorno interno. Dessas tres, precisamos de apenas uma, em virtude da dupla simetria do domínio.

Devemos então, observar qual das tres equações é essencial.

As funções U e V , são funções antissimétricas de x e y em todo o domínio, incluindo o contorno. Assim, as integrais dessas funções, estendidas ao longo do bordo interno se rão nulas. Dessa maneira a condição essencial é a terceira equação, pois $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$ são funções simétricas de x e y .

Para o contorno interno descarregado, ϕ é uma função linear de x e y , então:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

A terceira condição ficará então $|^2|$:

$$\oint \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} dx - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} dy \right) = 0 \quad V.1$$

Devemos notar, a grande dificuldade que encontramos ao tentar escrever esta equação em diferenças finitas em coordenadas cartesianas, para a discretização adotada.

Para contornar essa dificuldade, escrevemos V.1 em coordenadas triangulares, particularizando os valores de ϕ , α , β para cada ponto, e, também em coordenadas polares, tendo em vista que a função ϕ é constante no contorno interno, resultará:

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial \theta^n} = 0, \quad \text{V.2}$$

$$n = 1, 2 \dots$$

em todo esse contorno. Se V.2 não fosse verdadeira, as coordenadas polares não seriam eficientes para a discretização adotada.

As transformações de V.1 em coordenadas triangulares e coordenadas polares, encontram-se detalhadas no Apêndice.

A seguir passamos à apresentação e discussão dos resultados obtidos.

Tais resultados, foram comparados com os fornecidos pela Teoria Matemática da Elasticidade [7] e pelo método dos elementos finitos através do programa Lorane Linear.

A função de Airy, encontra-se representada na Figura 12.

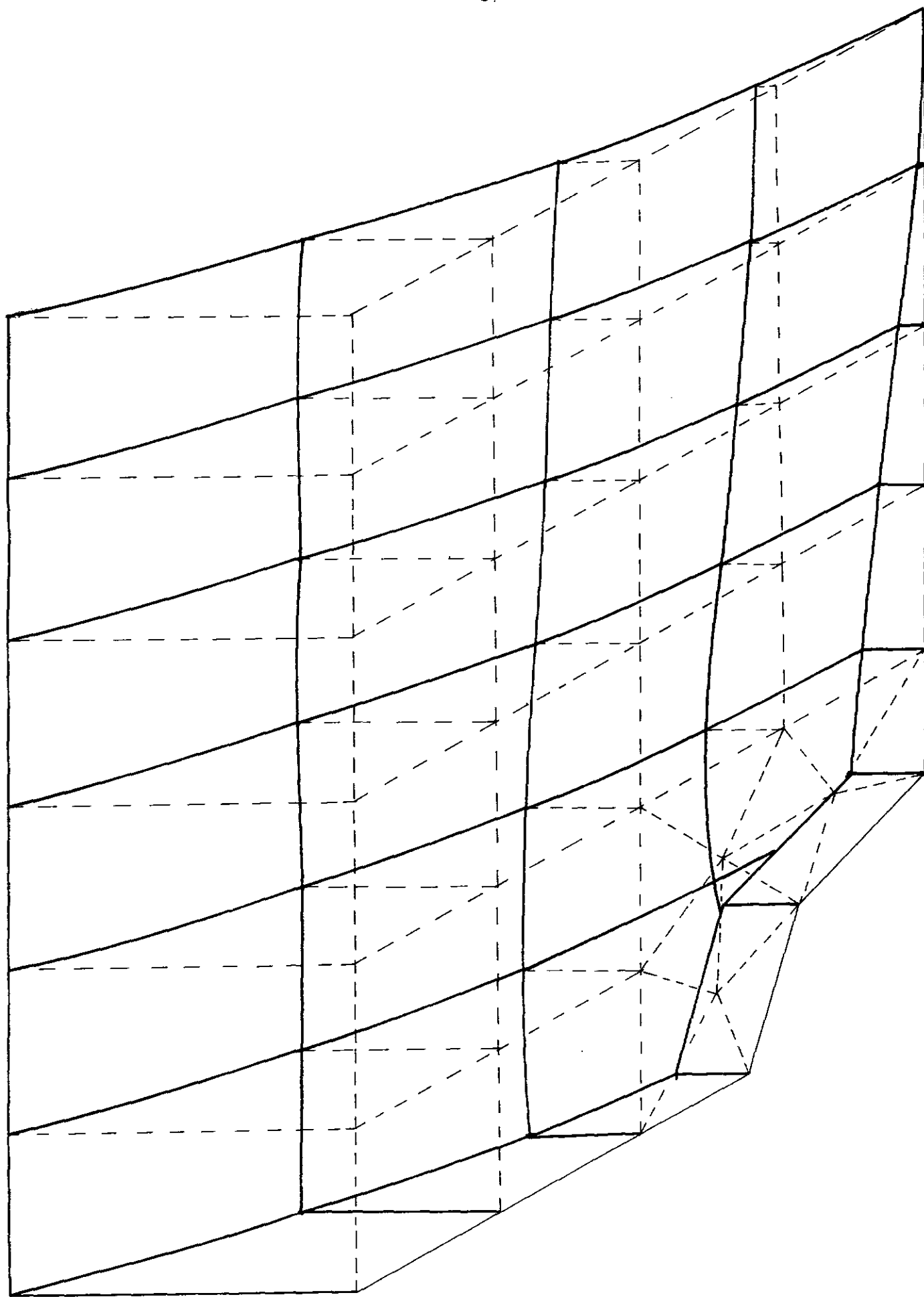
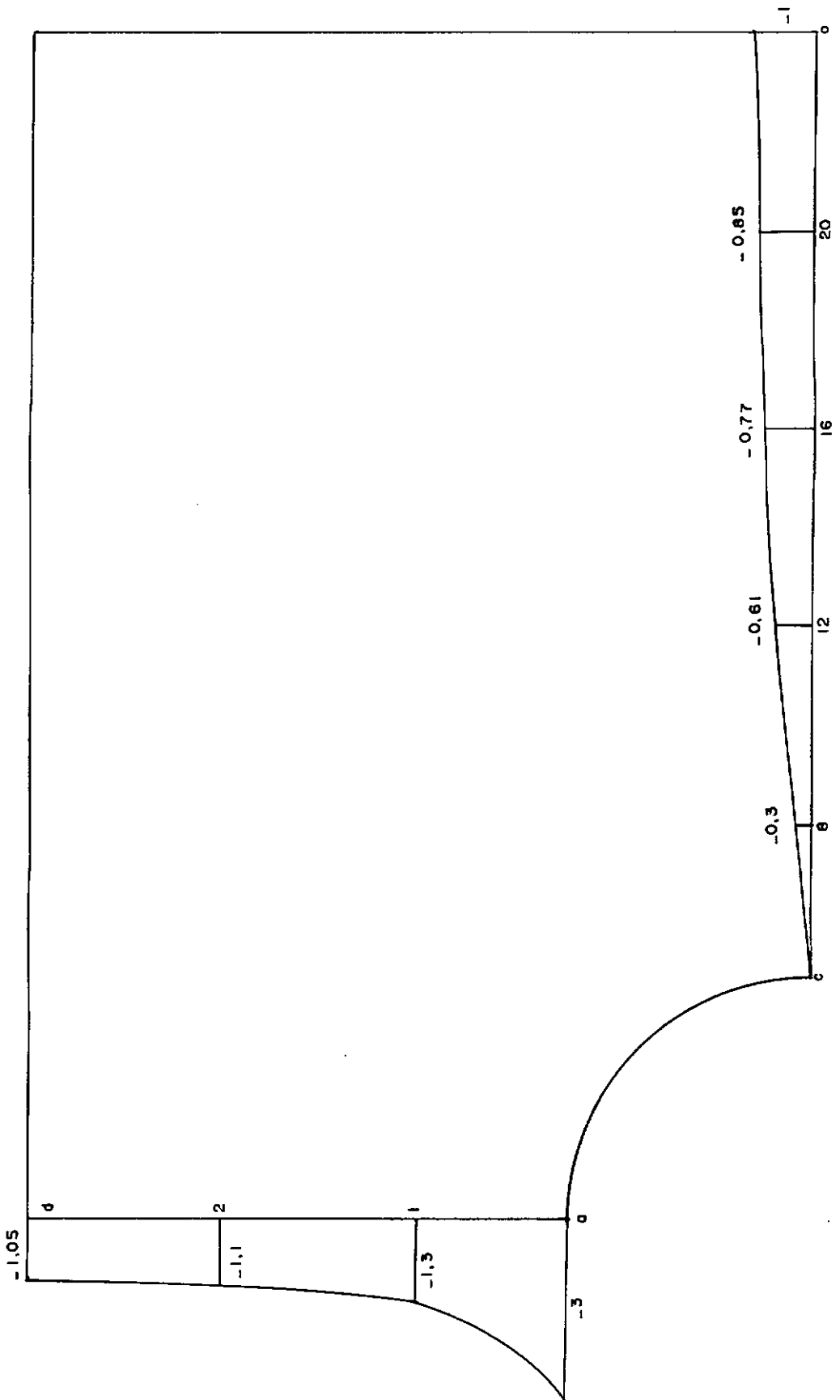


Figura 12

Os valores da função ϕ , encontram-se na tabela abaixo.

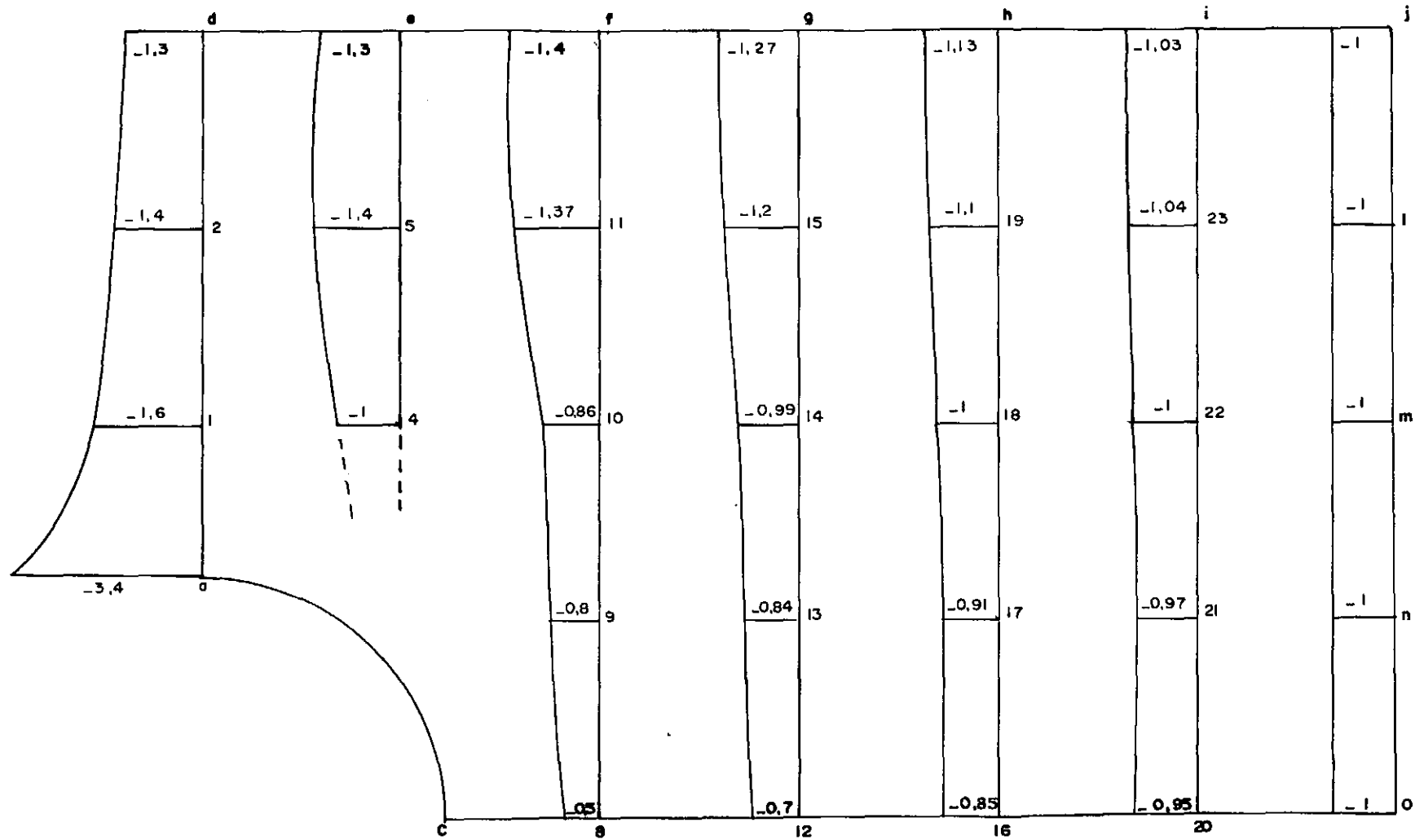
Ponto	ϕ	Ponto	ϕ
1	- 6,91	14	- 6,28
2	-11,89	15	-11,96
3	-5,26	16	-1,16
4	-7,03	17	-2,26
5	-11,97	18	- 5,69
6	- 4,35	19	-11,68
7	- 5,32	20	- 0,36
8	- 3,75	21	- 1,58
9	- 4,39	22	- 5,29
10	- 7,1	23	-11,56
11	-12,04	a	- 4,46
12	- 2,33	b	- 4,46
13	- 3,23	c	- 4,46

Nos gráficos a seguir, mostramos as tensões nos diversos pontos do domínio.

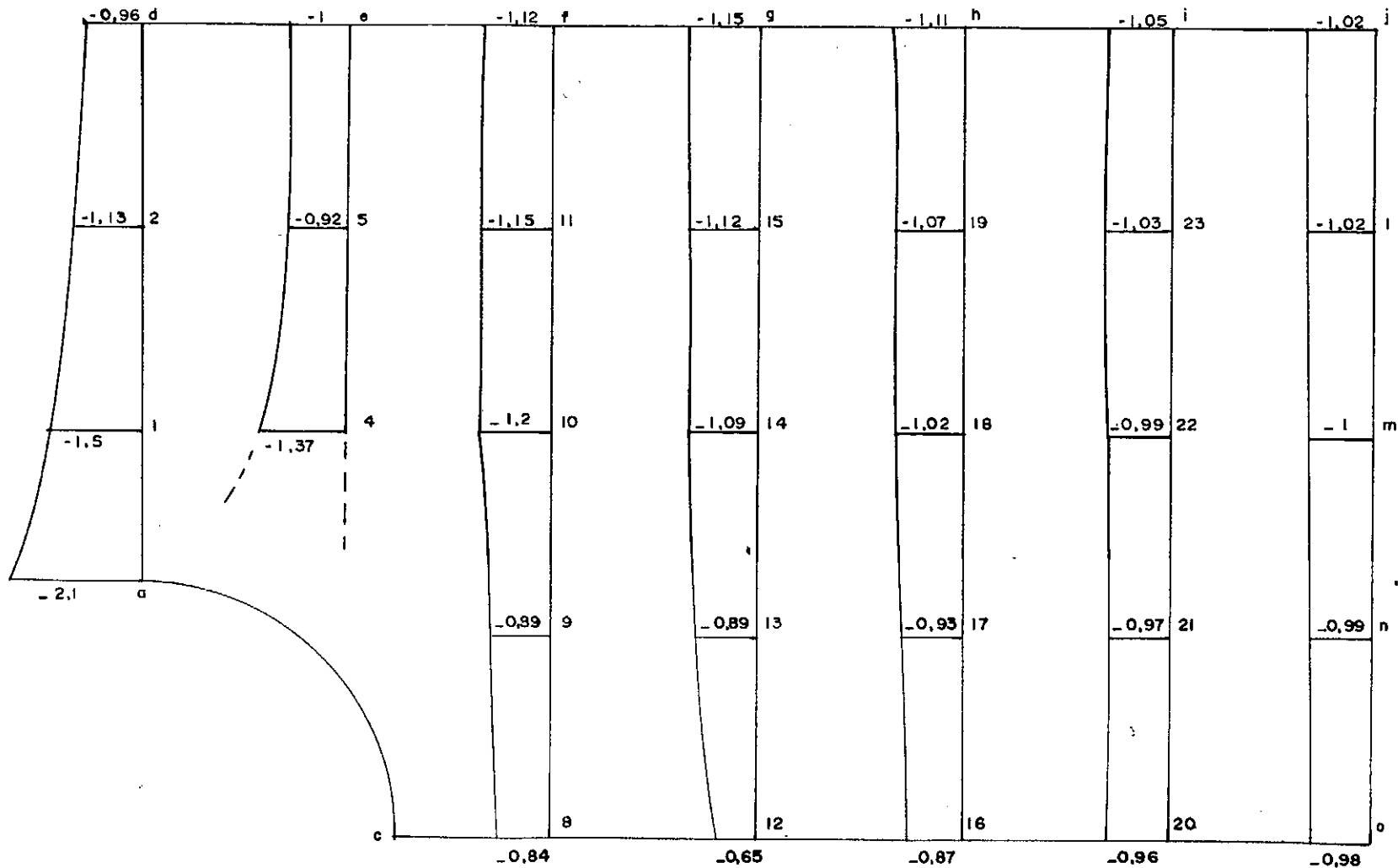


σ_x - Exemplo 1

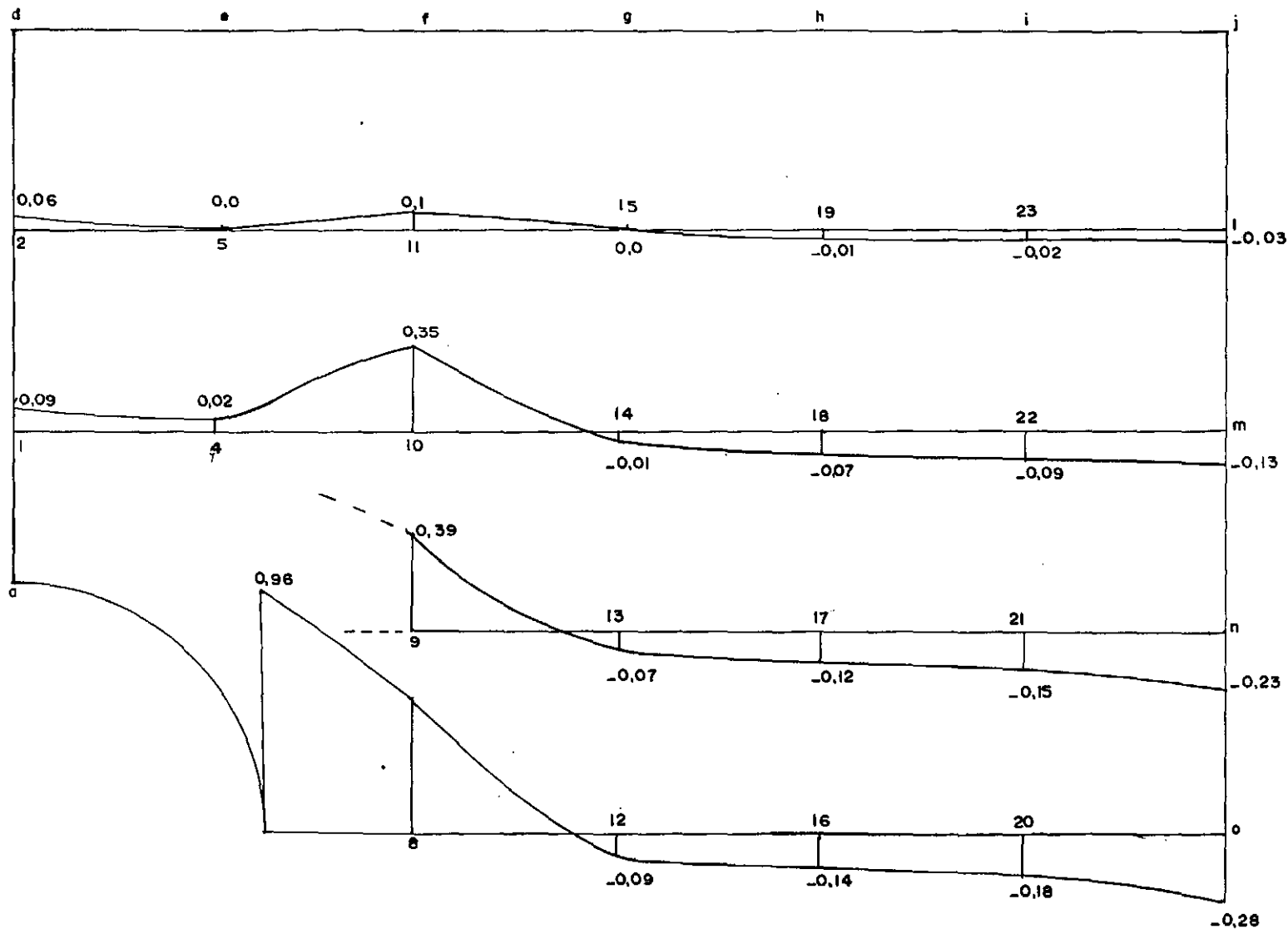
(Timoshenko)



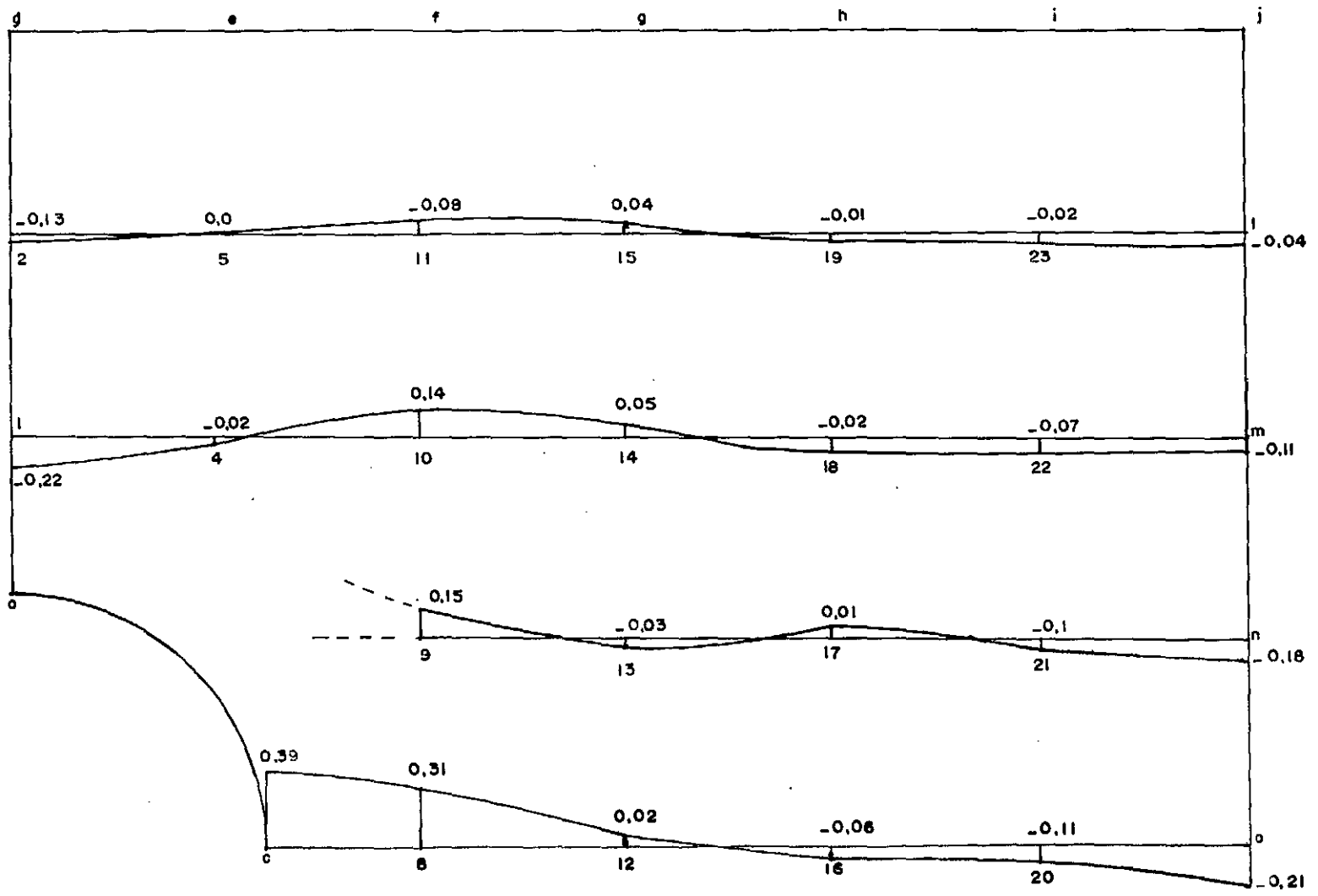
σ_x - Exemplo 1
(Diferenças Finitas)



σ_y - Exemplo 1
(Diferenças Finitas)



σ_y - Exemplo 1
(Lorane)



Os resultados por nós obtidos foram bons. O fato de que, na região de concentração de tensões, o método das diferenças finitas deram resultados melhores que o método dos elementos finitos, pode ser justificado, pois a discretização adotada, não é eficiente para esse método, já que o elemento triangular de primeira ordem considera as tensões constantes ao longo de sua superfície.

V.3 EXEMPLO 2

A seguir, resolvemos a mesma chapa anterior, porém com uma carga concentrada de $2tf$ na direção x , como mostra a Figura 13. A matriz dos coeficientes permanece a mesma, pois nos utilizamos da mesma malha.

V.3-1 Condições de Contorno

V.3-1.1 Valores de ϕ e suas Derivadas no Contorno

$$\phi_o = 0 \quad , \quad \phi_n = 1,6 \quad , \quad \phi_m = -3,2 \quad , \quad \phi_\ell = -4,8$$

$$\phi_d = \dots = \phi_j = -6,4$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{em todos os pontos}$$

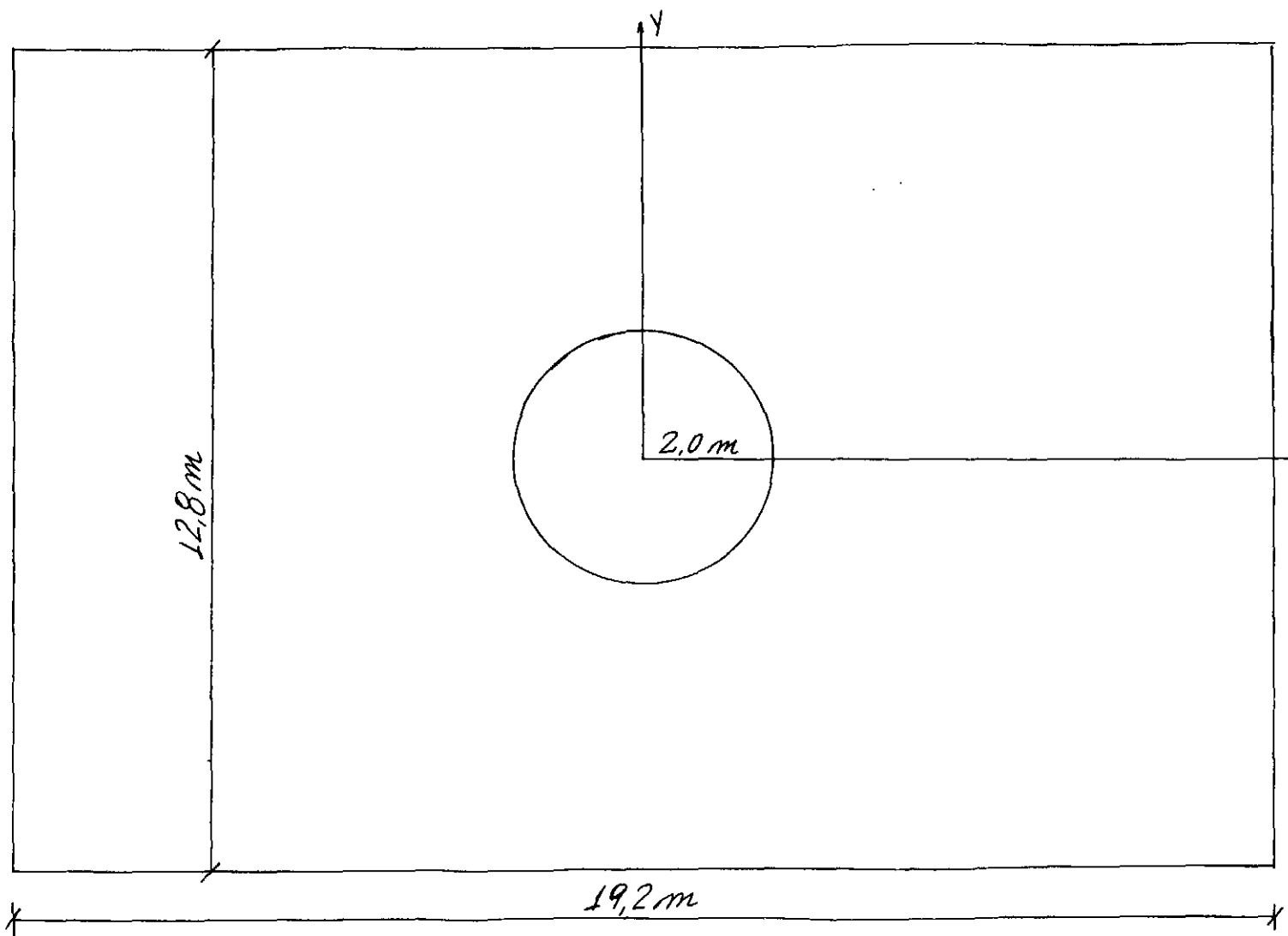


Figura 13

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -1 \quad \text{em todos os pontos.}$$

V.3-1.2 Valores de S nos Contornos

$$S_o = 0,781 \phi_{20} - 1,25$$

$$S_n = 0,781 \phi_{21} + 1,25$$

$$S_m = 0,781 \phi_{22} + 2,25$$

$$S_\ell = 0,781 \phi_{23} + 3,75$$

$$S_j = 0$$

$$S_i = 0,781 \phi_{23} + 3,75$$

$$S_h = 0,781 \phi_{19} + 3,75$$

$$S_g = 0,781 \phi_{15} + 3,75$$

$$S_f = 0,781 \phi_{11} + 3,75$$

$$S_e = 0,781 \phi_5 + 3,75$$

$$S_d = 0,781 \phi_2 + 3,75$$

A função ϕ encontra-se representada na Figura 14.

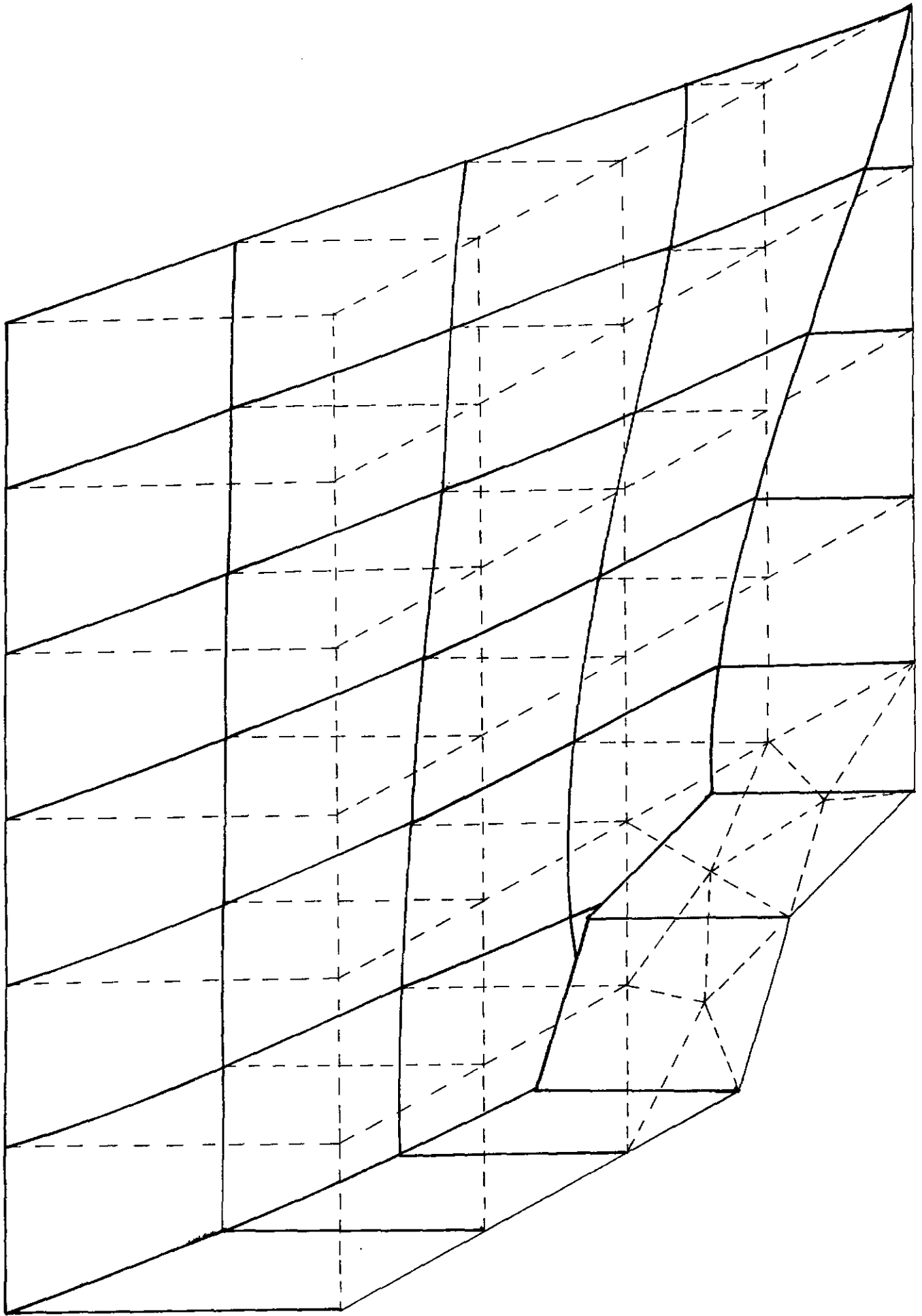


Figura 14

Os valores de ϕ estão representados na tabela abaixo.

Ponto	ϕ	Ponto	ϕ
1	- 4,48	14	- 3,95
2	- 5,15	15	- 4,99
3	- 4,29	16	- 2,04
4	- 4,45	17	- 2,53
5	- 5,15	18	- 3,55
6	- 4,06	19	- 4,87
7	- 4,13	20	- 0,96
8	- 3,77	21	- 1,87
9	- 3,88	22	- 3,26
10	- 4,31	23	- 4,79
11	- 5,10	a	- 4,01
12	- 3,01	b	- 4,01
13	- 3,26	c	- 4,01

Para esse exemplo, comparamos nossos resultados, apenas com os resultados fornecidos pelo método dos elementos

finitos, pois não conhecemos a solução analítica.

Novamente, os resultados encontrados foram satisfatórios.

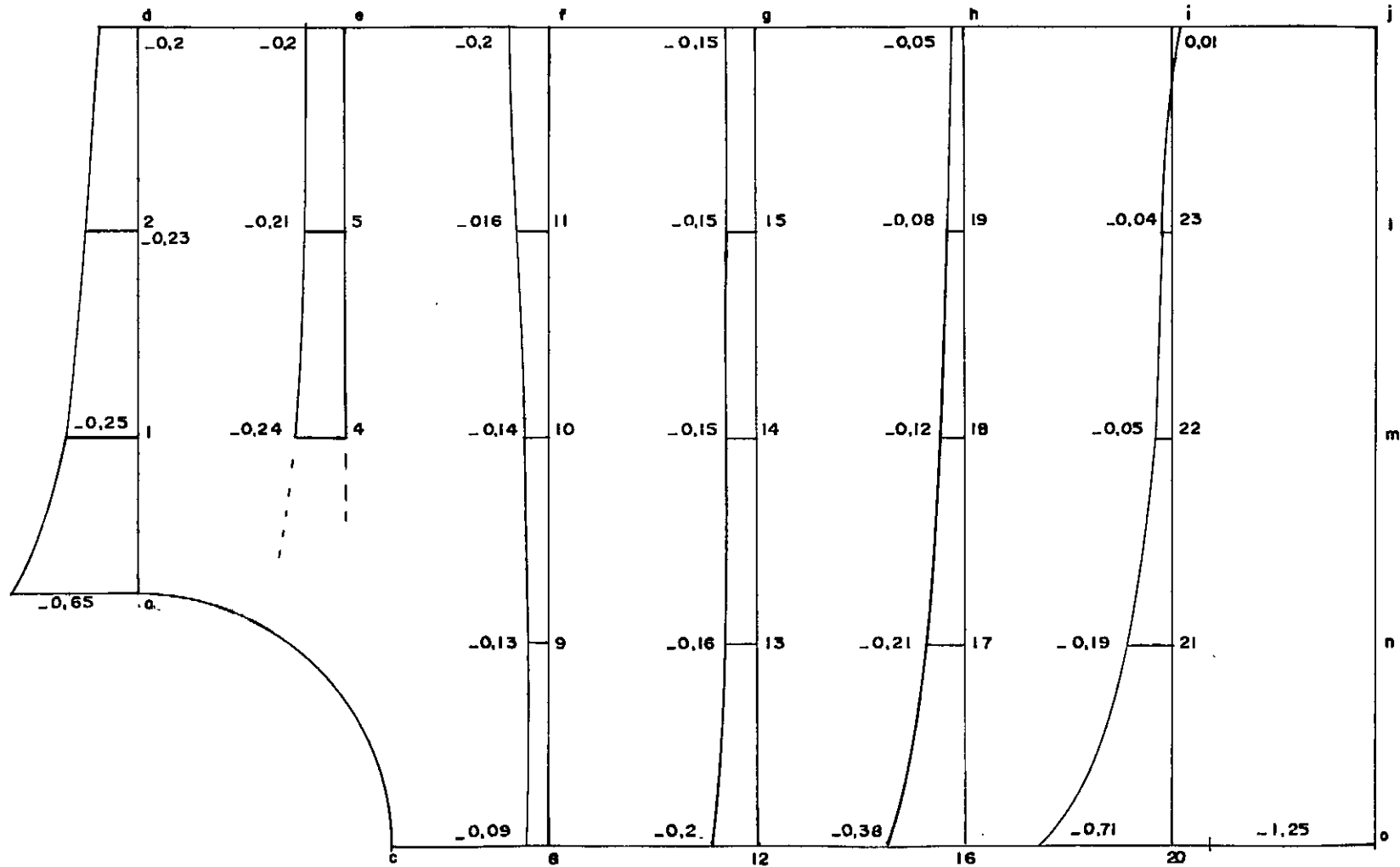
Cabe aqui, um comentário a respeito do valor encontrado para a tensão na direção x para o ponto O . A tensão naquele ponto, teoricamente seria infinita. A função naquele ponto é singular, caracterizando um grande erro ao se escrever as derivadas em diferenças finitas.

Pela comparação dos resultados fornecidos pelos métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos, cremos que o processo por nós encaminhado, chegará a ser uma opção no cálculo de chapas multiplamente conexas, desde que haja uma continuidade de pesquisa, no sentido de se obter conclusões mais profundas sobre o mesmo.

Embora o método das Diferenças Finitas seja de difícil tratamento computacional, cremos que a automatização do processo seria de grande valia para testar, de maneira segura, sua eficiência e os tempos de computação, bem como a sua convergência. Além disso, diminuiria muito a intervenção do homem, o que reduziria bastante a possibilidade de erro, pois é fato sabido que o método das Diferenças Finitas é muito instável numericamente, pois uma pequena variação nos valores dos coeficientes da matriz, provoca grandes variações nos valores da função de tensões.

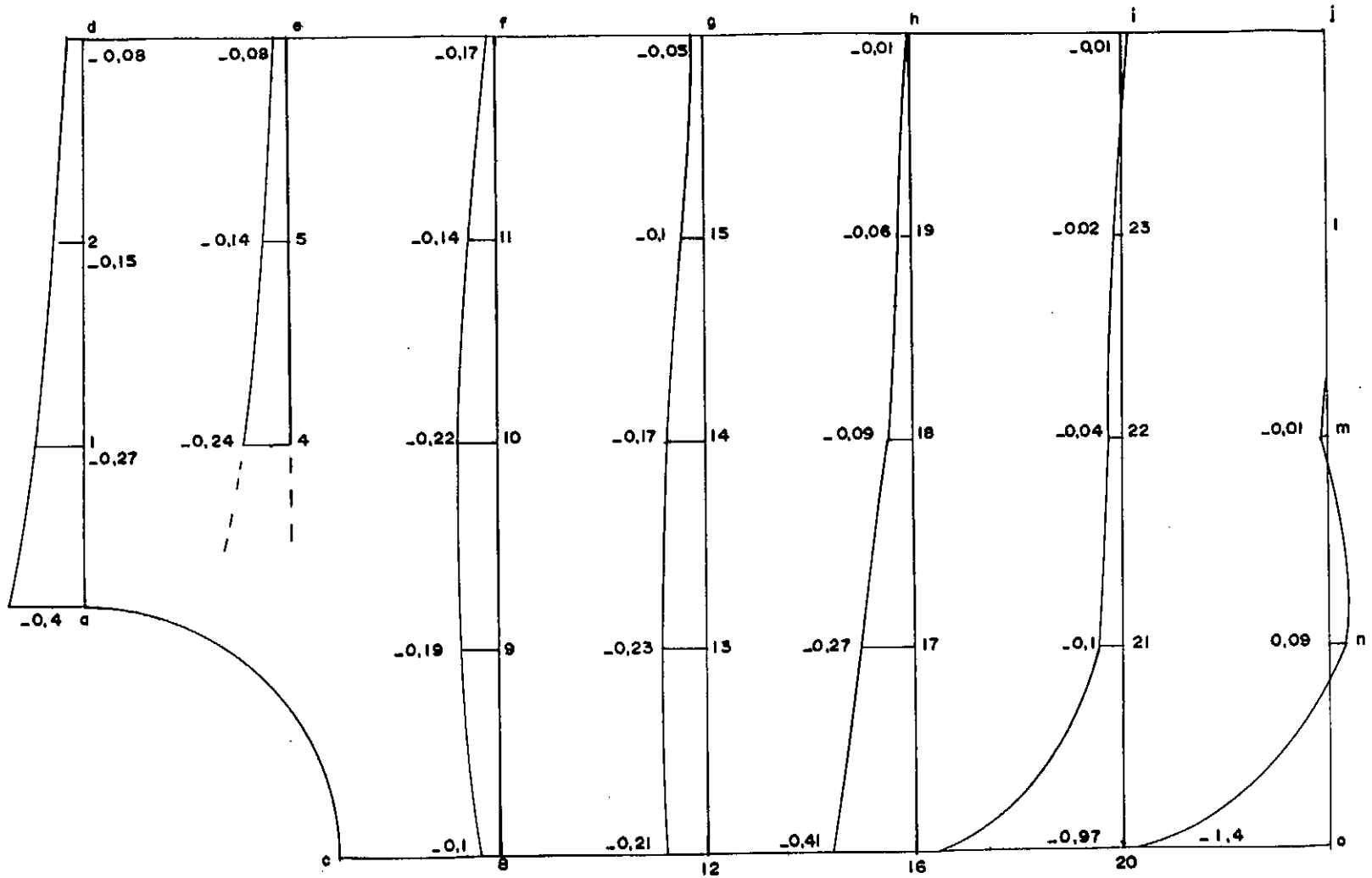
Outra sugestão, seria, resolver os exemplos por nós apresentados, usando uma malha mais refinada, o que poderia dar uma idéia da convergência do processo.

Embora reconhecendo que as limitações são várias, o seu desenvolvimento, cremos, representa um pequeno passo no sentido de tirar o método das Diferenças Finitas do esquecimento em que se encontra.



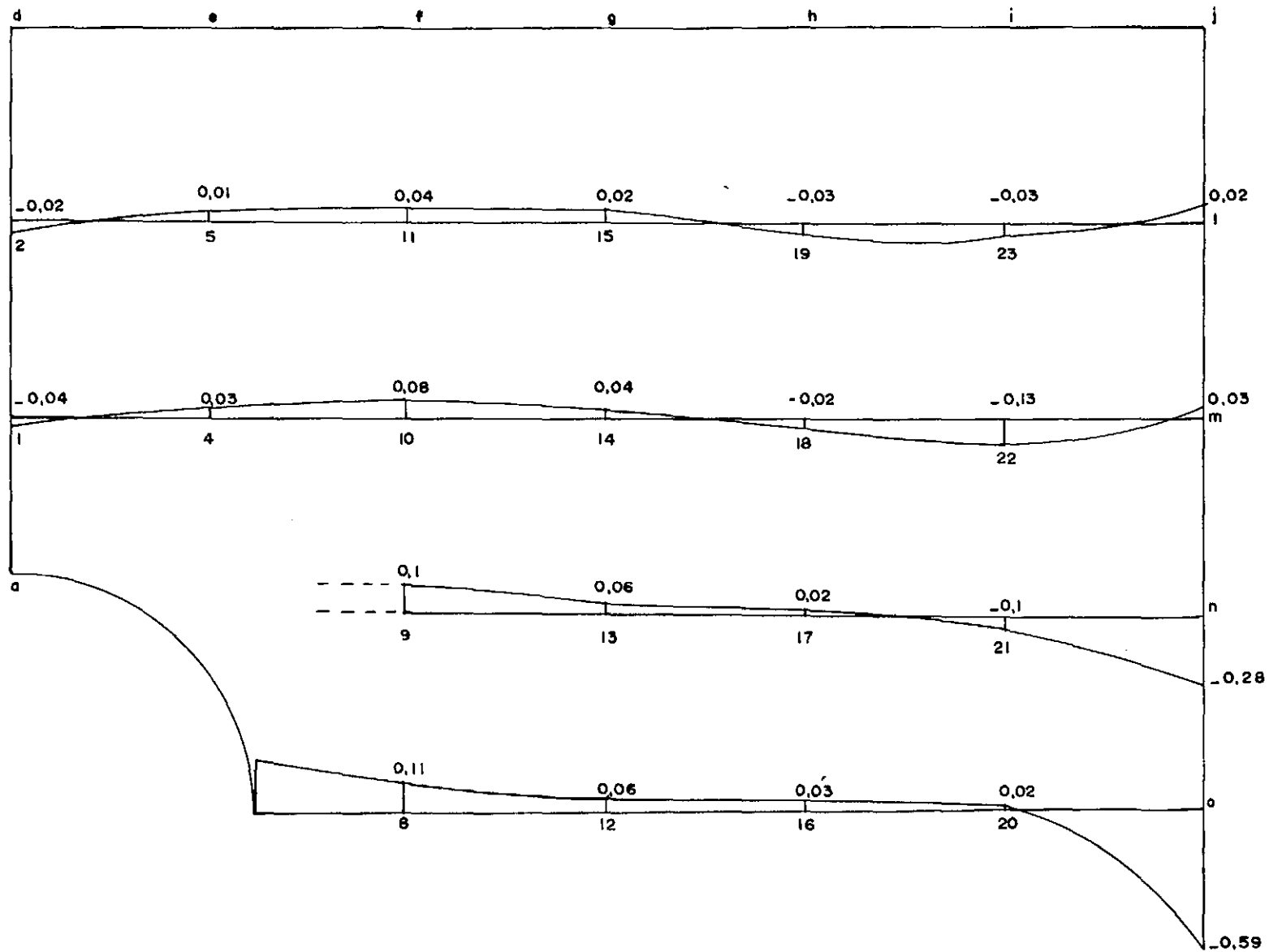
(Diferenças Finitas)

σ_x - Exemplo 2



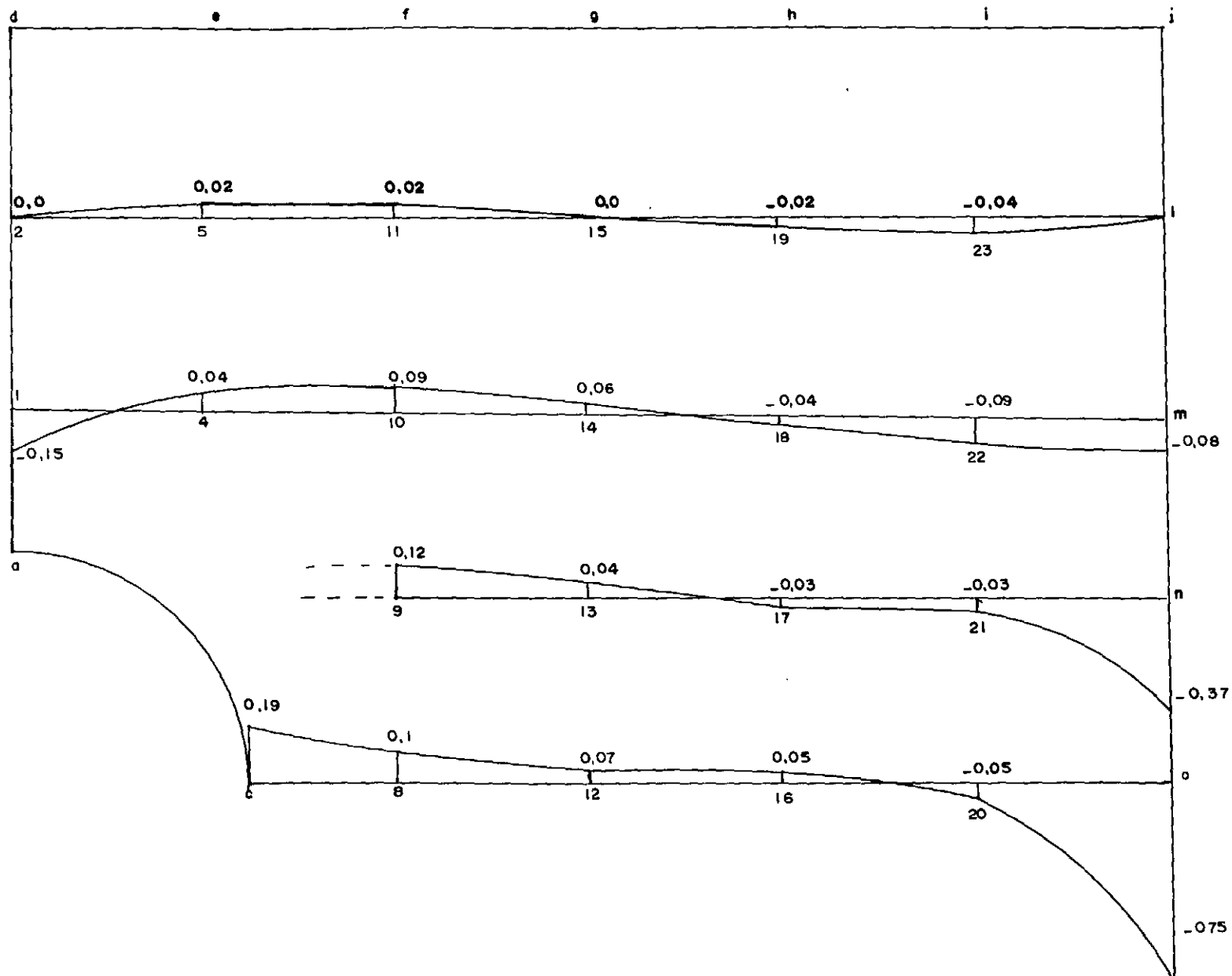
q_x - Exemplo 2

(Lorane)



σ_y - Exemplo 2

(Diferenças Finitas)

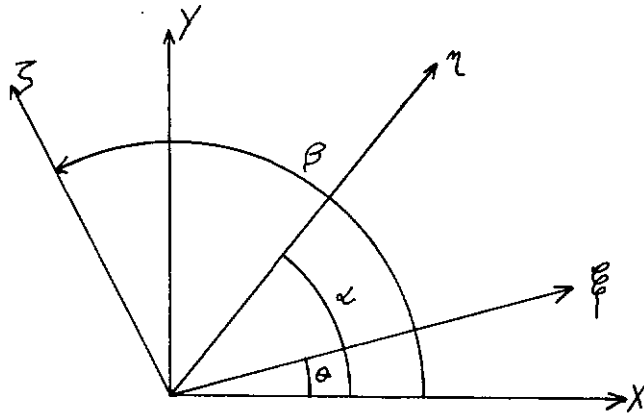


APÊNDICE A

Mostraremos agora, como proceder as transformações dos termos das equações dos contornos internos, de coordenadas cartesianas, para coordenadas triangulares e coordenadas polares.

A.1 TRANSFORMAÇÕES PARA COORDENADAS TRIANGULARES

Essas transformações, serão particularizadas para o presente caso.



Isto é, para a discretização adotada, temos:

Ponto a:

$$\theta = 90^\circ \quad , \quad \alpha = 157,5^\circ \quad e \quad \beta = 202,5^\circ$$

Ponto b:

$$\theta = 45^\circ \quad , \quad \alpha = 112,5^\circ \quad e \quad \beta = 157,5^\circ$$

Ponto c:

$$\theta = 0^\circ \quad , \quad \alpha = 67,5^\circ \quad e \quad \beta = 112,5^\circ$$

As relações entre as coordenadas cartesianas e triangulares, são:

$$x = \xi \cos \theta + \eta \cos \alpha + \zeta \cos \beta$$

A.1

$$y = \xi \sin \theta + \eta \sin \alpha + \zeta \sin \beta$$

Os termos a serem escritos em coordenadas triangulares, são:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \quad , \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \quad , \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \quad e \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}$$

Derivando as relações A.1, obtemos:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \theta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos \alpha \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \cos \beta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sin \beta$$

As derivadas da função ϕ , em relação a ξ , η e ζ , são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \beta$$

As derivadas segundas serão:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \quad A.2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cos^2 \beta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \beta \cos \beta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \sin^2 \beta$$

As relações A.2, formam um sistema de equações algébricas, que resolvido, nos fornece $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ em função das coordenadas triangulares.

Derivando as relações A.2, teremos:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cos^3 \theta + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \sin^3 \theta$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cos^3 \alpha + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \sin^3 \alpha$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \zeta^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cos^3 \beta + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \beta \sin \beta + 3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \cos \beta \sin^2 \beta + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \sin^3 \beta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^2 \partial \zeta} = & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cos^2 \alpha \cos \beta + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} (\cos^2 \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} (\sin^2 \alpha \cos \beta + \\ & + 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \sin^2 \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações A.3, encontramos os termos:

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \text{ e } \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}$$

Temos, então, todos os termos das equações do bordo interno, escritos em coordenadas triangulares.

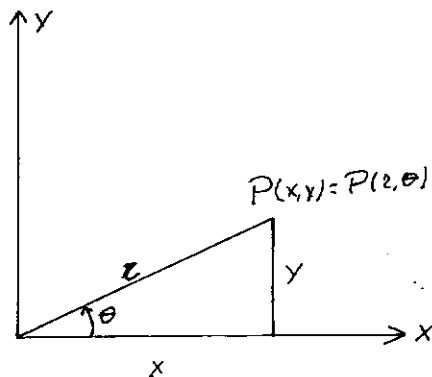
A.2 TRANSFORMAÇÕES PARA COORDENADAS POLARES

As expressões por nós encontradas, estão particularizadas para problemas duplamente simétricas em relação a x e y , com contorno interno descarregado.

Vimos no Capítulo V, que a equação essencial para determinação da constante do contorno interno, para nosso caso, tem a seguinte forma:

$$\oint \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} dx - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} dy \right] = 0$$

teremos que encontrar apenas $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$ e $\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}$



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} +$$

$$+ 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r}$$

Em decorrência de ϕ ser constante ao longo do contorno interno, teremos todas as derivadas em θ , resultando para as derivadas terceiras de ϕ , as seguintes expressões.

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \cos^3 \theta + 3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r}$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} \sin^3 \theta + 3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r}$$

BIBLIOGRAFIA

- | ¹ | SANTOS, SYDNEY M. G. - Cálculo Numérico de Placas e Paredes Delgadas e Contorno Poligonal Qualquer". Memórias apresentadas nas Jornadas Sul-Americanas, realizadas em Santiago do Chile, em Setembro de 1959.
- | ² | MASON, JAYME - O Problema da Conexão Múltipla nas Chapas" - Anuário da Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado da Guanabara - Nº 1, pg. 99, 1961.
- | ³ | SALVADORI, M. G. e BARON, M. C. - Numerical Methods in Engineering" - Prentice-Hall.
- | ⁴ | BENETTI, GILBERTO A. - Aplicação do Método das Diferenças Finitas a um Problema de Elasticidade - Tese de M. Sc. apresentada na COPPE/UFRJ em novembro de 1971.
- | ⁵ | WEYNE FILHO, MOACYR - Um Modelo de Malha Irregular para o Método das Diferenças Finitas - Tese de M.Sc. apresentada na COPPE/UFRJ em fevereiro de 1979.
- | ⁶ | TIZATTO, WANDERLEI - Vigas Paredes em Concreto Leve com e sem furos - Tese apresentada na COPPE/UFRJ em agosto de 1981.
- | ⁷ | TIMOSHENKO, S. P. e GOODIER, J. N. - Theory of Elasticity - 3.^a Edição - McGraw-Hill, New York, 1970.

- | ⁸ | TIMOSHENKO, S. P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S. - Theory of
Plates and Shells - 2.^a Edição - MacGraw-Hill, New
York, 1959.

- | ⁹ | REKACH, V. G. - Manual of the Theory of Elasticity - Mir
Publishers, Moscow, 1979.

- | ¹⁰ | GONÇALVES, E. M. e PAMPLONA, D. C. - Uma Nova Técnica
de Discretização Numérica de Problemas de Contorno -
- II Congresso Latino-Americano Sobre Métodos Compu
tacionais para Engenharia e IV Simpósio Sobre Sis
temas Computacionais para Engenharia Civil - pg. 755-
-766 - Vol. 2 - Curitiba, Dezembro de 1980.

- | ¹¹ | SAVIN, G. N. - Stress Concentration Around Holes - Pergam
on-Press, 1961.

- | ¹² | "A Linguagem Lorone Linear para Análise Estrutural por
Computador" - Manual de utilização - 1.^a Edição - Univers
idade Federal do Rio Grande do Sul - Setembro de 1977.